Maigan Stefanne da Silva Alcântara

ESPAÇO DE CHU COMO MODELO PARA MECÂNICA QUÂNTICA

Recife

Fevereiro/2016

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA.

ESPAÇO DE CHU COMO MODELO PARA MECÂNICA QUÂNTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada como exigência parcial à obtenção do título de Mestre.

Área de concentração: Biometria e Estatística Aplicada

Orientador: Dr. Wilson Rosa de Oliveira Junior

Recife

Fevereiro/2016

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA

ESPAÇO DE CHU COMO MODELO PARA MECÂNICA QUÂNTICA

Maigan Stefanne da Silva Alcântara

Dissertação julgada adequada para obtenção do título de mestre em Biometria e Estatística Aplicada, defendida e aprovada por unanimidade em 28/01/2016 pela Comissão Examinadora.

Orientador:

Prof. Dr. Wilson Rosa de Oliveira Junior
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Banca Examinadora:

Prof.Dr. Tiago Alessandro Espínola Ferreira
Universidade Federal Rural de Pernambuco
DEInfo-UFRPE

Prof. Dr. Thiago Dias Oliveira Silva
Universidade Federal Rural de Pernambuco
DMat - UFRPE

Agradecimentos

Agradeço a Deus que ainda não conheci ao certo, mas sei que inquieta meu espírito, instiga o meu coração e me leva à sempre buscar, movida pela fé, me manter viva e fiel à vida de estudo e trabalho.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Wilson Rosa de Oliveira Junior, pela liberdade e confiança referente ao presente trabalho, além da indiscutível amizade e compreensão em momentos difíceis.

Ao meu co-orientador Prof. Dr. Thiago Dias Oliveira Silva por acreditar em mim, me mostrar o caminho da ciência e por ser esse exemplo de profissional.

Ao Prof. Dr. Thiago Dias Oliveira Silva por aceitar participar da minha banca examinadora e por sua colaboração neste trabalho.

Agradeço a Capes pelo apoio financeiro.

Agradeço a Universidade Federal Rural de Pernambuco, seu corpo docente, direção, administração e toda a equipe de funcionários pelo suporte e acolhimento. A essa instituição, devo minha vida acadêmica e meu crescimento intelectual, cultural e político.

Agradeço a minha mãe Marinês, pelo seu apoio incondicional ao longo deste processo de dissertação e de muitos outros. Obrigada por acreditar em mim, mesmo quando eu não acreditava. Você é minha fortaleza.

Ao meu pai José Carlos, por tudo que você me deu e me ensinou. Obrigada pela sua generosidade, simplicidade, seu amor incondicional, carinho e afeto.

A minha mana Maria Clara, obrigada pelo amor, cumplicidade e por estar ao meu lado sempre.

Agradeço a minha professora em todos os sentidos Maria da Penha, que sempre me motivou até nos momentos em que não tinha mais motivação. Não encontro palavras que consigam te agradecer, simplesmente fico completamente envolvida por um enorme sentimento: gratidão. Muito obrigada.

Agradeço a meu namorado Samuel Falcão, por toda compreensão, amor, amizade e amparo. Sempre acreditando no meu potencial e dando força nos momentos difíceis.

Aos amigos que fizeram parte desses momentos sempre me ajudando e incentivando.

De modo geral, agradeço a todos os meus familiares, minha base, meu suporte. Que sempre me apoiaram e torceram por mim. Muito obrigada.

Por fim, mas não por último, agradeço a todos os amigos e professores do departamento de Biometria e Estatística Aplicada da UFRPE pelo enorme aprendizado, apoio e carinho. Na Biometria percebi que o aprendizado é uma construção diária cujo ingrediente principal é o afeto. A esta rede de apoio que me acolheu, os meus mais sinceros agradecimentos.

Resumo

Os espaços de Hilbert e operadores têm sido utilizados na descrição dos sistemas quânticos e operações quânticas com um tremendo sucesso. Porém, alguns resultados aparentemente simples se tornam excessivamente complicados ou inacessíveis, tornando-se difícil chegar à essência dos resultados. A abordagem via Teoria das Categorias permite de forma unificada investigar as propriedades quânticas em contextos fora do ambiente dos espaços de Hilbert. Talvez as três propriedades mais atraentes dessa abordagem sejam: em primeiro lugar, é possível identificar imediatamente as particularidades dos nossos sistemas quânticos. Em segundo lugar, podemos representar os resultados usando a intuitiva forma de diagramas, a qual nos possibilita manipular tal linguagem de uma maneira acessível da mesma forma que é abordada com equações. Por último, quando induzimos a utilização da teoria das categorias como modelagem à Mecânica Quântica, isto no dá uma nova perspectiva à mesma, além disso, abre-se todo o mundo da matemática com possíveis locais para onde a computação quântica possa ter lugar. Contudo, grande parte deste campo relativamente recente de estudo é coberto apenas de maneira fragmentada ou a nível de investigação. Nosso foco principal são as categorias monoidais, principalmente as simétricas, para o qual se propõe uma interpretação física. Uma especial atenção é dada às categorias que tem espaços finitos e assim direcionamos para as categorias $*$-autônomos, na sua particularidade com o espaço de Chu. Investigamos as propriedades categóricas dos espaços de Chu com o propósito de usar estes espaços como modelo da mecânica quântica categórica. Realizamos uma exposição introdutória da Teoria das Categorias e dos espaços de Chu. Mostramos que a categoria dos espaços de Chu, Chu_K, é uma categoria monoidal simétrica, compacta e cartesiana. Não foi possível encontrar uma estrutura *dagger*, porém indicamos possíveis alternativas para trabalhos futuros.

Palavras-chave: Categorias, Mecânica Quântica, Computação, Categorias monoidais, Espaço Chu.

Abstract

Hilbert spaces and operators have been used in the description of quantum systems and quantum operations with tremendous success. However, some seemingly simple results become excessively complicated or inaccessible, making it difficult to get to the essence of the results. The approach via Category Theory allows a unified way to investigate the quantum properties in contexts outside of the environment of Hilbert spaces. Perhaps the three most attractive properties of this approach are: first, you can immediately identify the particularities of our quantum systems. Secondly, we can represent the results using the intuitive form of diagrams, which enables us to handle such language in an accessible way in the same way that is covered with equations. Finally, when we induced the use of category theory and modeling to quantum mechanics, it gives a new perspective on the same also opens up the world of mathematics with possible places where quantum computing can take place. However, much of this relatively new field of study is covered only in a piecemeal way or the level of research. Our main focus are the monoidal categories, mostly symmetrical, for which we propose a physical interpretation. a special attention is given to categories that have finite spaces and so we direct to the categories $*$-autônomos in its particularity with Chu space. We investigated the properties of categorical Chu spaces with the purpose of using these spaces as a model for categorical quantum mechanics. We conducted an introductory statement of the theory of categories and Chu spaces. We show that the category of Chu spaces, Chu_K is a symmetric monoidal category, compact and Cartesian. Could not find a *dagger* structure but indicated possible alternatives for future work.

Key-words: Categories, Quantum Mechanics, Computer, monoidal categories, Chu space.

Sumário

1 Introdução

Teoria das Categorias e Mecânica Quântica constituem, supostamente, dois campos científicos completamente diferentes. Na realidade, não só possuem muito em comum como são enriquecidos mutuamente a partir de visões e abordagens de um sobre outro (ABRAMSKY; COECKE, 2004; COECKE; DUNCAN, 2008; COECKE, 2011).

Em um primeiro momento, a Teoria das Categorias pode ser vista como uma generalização da álgebra de funções (AWODEY., 2010). Nesse contexto, claramente, a principal operação sobre funções é a composição. Na realidade, uma Categoria é uma estrutura abstrata constituída de *objetos e setas* entre os objetos, com uma propriedade fundamental que é a *composicionalidade das setas* (ABRAMSKY; TZEVELEKOS, 2011).

A princípio, pode-se pensar na questão 'por que do estudo das Categorias?' Podemos oferecer uma gama de respostas que vêm de diferentes origens:

- **Matemáticos**: a teoria das categorias organiza os contextos matemáticos de uma maneira nova e poderosa, revelando novas conexões e estruturas, permitindo uma visão mais ampla (MACLANE, 1998; OOSTEN, 2002).

- **Cientistas da computação**: a teoria das categorias dá uma nova maneira de abordar importantes noções como composicionalidade, abstração, independência de representação, *genericidade* e muito mais (BARR; WELLS, 1999; PIERCE, 1988; PIERCE, 1991).

- **Lógicos**: a teoria das categorias dá uma visão independente da sintaxe das estruturas fundamentais da lógica, e abre novos tipos de modelos e interpretações (ABRAMSKY; TZEVELEKOS, 2011; BLUTE; SCOTT, 2004; BORCEUX, 1994; MAKKAI; REYES, 1977; LAMBEK; SCOTT, 1986).

- **Físicos**: a teoria das categorias oferece novas maneiras de formular teorias físicas numa forma estrutural com aplicações recentes surpreendentes a Computação Quântica (COECKE, 2011; COECKE, 2006).

- **Filósofos**: a teoria das categorias dá uma nova abordagem para os fundamentos estruturalistas da matemática e da ciência; uma alternativa ao tradicional foco em teoria dos conjuntos (SHULMAN, 2008; BLASS, 1984).

Teoria das Categorias é uma teoria recente, tendo sido criada por S. Eilenberg e S. Mac Lane em 1945 (EILENBERG; LANE, 1945), como uma decorrência de seus trabalhos em topologia algébrica. Desde então tem influenciado muitas áreas, como uma forma revolucionária de entendimento e de abordagem. Atualmente esta Teoria, a Mecânica Quântica (ABRAMSKY; COECKE, 2004), e a Ciência da Computação (BARR; WELLS, 1999) constituem uma área de pesquisa extremamente ativa internacionalmente.

Entre diversas características da Teoria das Categorias que motivam o seu uso em Mecânica Quântica (BAEZ; STAY, 2011; COECKE, 2006), destacam-se:

1. *Independência de Implementação*: Objetos e setas são entidades primitivas as quais não são, necessariamente, coleções de elementos e de funções. Portanto, Teoria das Categorias pode ser considerada como uma formalização adequada para tratar propriedades abstratas independentemente de estruturas. Esta é mais uma característica relevante à Mecânica Quântica: permite tratar propriedades "independentes de implementação."

2. *Dualidade:* Em Categorias, as principais ideias ocorrem aos pares, de acordo com uma noção genérica de dualidade. Assim, de certa forma, pode-se afirmar que a noção categorial de dualidade divide o trabalho pela metade, tanto em termos de construções como de resultados. Inclusive, a noção de dualidade, embora óbvia na Teoria das Categorias, frequentemente não é intuitiva em outras teorias.

3. *Notação Gráfica:* Uma das características da Teoria das Categorias é a expressão de equações na forma de diagramas, facilitando a identificação e a compreensão de seus componentes e de seus relacionamentos.

4. *Expressividades de suas construções:* Uma das grandes vantagens do uso desta abordagem categórica na Mecânica Quântica é a expressividade de suas construções que frequentemente não possuem paralelo nas demais teorias como na Teoria de Conjuntos. Essa expressividade permite formalizar ideias complexas de forma simples, bem como propicia um novo, ou melhor entendimento das questões relacionadas à Mecânica Quântica.

5. *Herança de Resultados:* Por fim, esta teoria permite construir categorias a partir de categorias já existentes, bem como passar de um tipo de estrutura matemática para outro. Em ambos os casos, frequentemente, é possível herdar resultados á provados de uma categoria para outra, simplificando e até dispensando a verificação de alguns resultados.

Há na literatura inúmeras propostas de que a Mecânica Quântica pode ser expressa utilizando Categorias em vez do tradicional espaço de Hilbert (BAEZ, 2006; ABRAMSKY; COECKE, 2004). Especificamente, as *Categorias monoidais simétricas dagger*($\dagger - CMS$ - iremos abordar no capítulo 6) com estruturas de base 'suficiente', onde conseguem descrever muitas características da Mecânica Quântica (COECKE; DUNCAN, 2008; COECKE; PAVLOVIC, 2007; COECKE; PAQUETTE; PAVLOVIC, 2008).

Coecke e Edwards (2008) exploram alguns exemplos concretos de Categorias Monoidais Simétricas para modelar características importantes da Mecânica Quântica, por exemplo, o protocolo de teletransporte quântico (COECKE; EDWARDS, 2008). Tais autores mostram dois fatos importantes: que o modelo de 'brinquedo' de *Spekkens* (SPEKKENS, 2007) é uma interessante instância da axiomática quântica categórica e que dentro de **FRel** - categoria de conjuntos finitos e as relações com o produto cartesiano como um tensor- o conjunto de dois elementos $\{0, 1\}$ vem equipado com dois observáveis complementares.

Neste contexto, nossa atenção especial é dada às categorias que têm espaços finitos, direcionamos o estudo para as categorias *-autônomas, e seus casos particulares como os Espaços de Chu.

Espaço de Chu é um caso especial de uma construção que apareceu originalmente na monografia de Chu (1979) (CHU, 1979), como um apêndice ao livro de Barr (1979) (BARR, 1979).

O interesse em categorias *-autônomas, com o advento da Lógica Linear (GIRARD, 1987), vem de que essas categorias fornecem modelos para Lógica Linear Multiplicativa (e com os pressupostos adicionais para toda Lógica Linear) (SEELY, 1989).

A construção Chu aplicada à categoria **Set**, de conjuntos de funções, foi introduzida de forma independente (com o nome de 'games') por Lafont e Streicher (1991) (LAFONT; STREICHER, 1991) e subsequentemente (sob o nome de espaços de Chu) foi objeto de uma série de artigos produzidos por Pratt (1999) e seus colaboradores (PRATT, 1997; PRATT, 1995; PRATT, 2003b; DEVARAJAN et al., 1999).

Espaço de Chu tem vários aspectos interessantes, dentre eles:

- Eles têm uma estrutura rica que em particular formam modelos de Lógica Linear (PRATT, 2003a).
- Eles têm uma teoria de representação preciosa: muitas categorias concretas de interesse podem ser totalmente incorporadas em espaços de Chu.
- Há uma noção natural de 'lógica local', em espaços de Chu (BARWISE; SELIGMAN,

1997) e uma caracterização interessante de transferência de informação através de morfismos de Chu (BENTHEM, 2000).

- Uma estrutura de co-monóide eficiente (PRATT, 2003a) para tratarmos estruturas de base.

Aplicações de espaços Chu têm sido propostas em uma série de áreas, incluindo a simultaneidade (PRATT, 2003b), teoria dos jogos (VANNUCCI, 2004), sistemas fuzzy (NGUYEN et al., 2001) e estudos matemáticos sobre a construção de Chu (em termos categóricos) (BARR, 1998; GIULI; THOLEN, 2007).

Neste sentido, iremos explorar a categoria de espaços de Chu sobre um corpo $\mathbb{K}$, sua relevância, e possíveis usos em Mecânica Quântica.

No capítulo 3, iremos apresentar uma introdução sucinta à Teoria das Categorias. Nos capítulos posteriores, 4 e 5, vamos abordar duas visões interessantes sobre espaços de Chu, assim como sua construção Categórica e algumas construções básicas.

Nos capítulos 6 e 7 fornecemos uma base à abordagem categórica à Mecânica Quântica, esta deve ser acessível, mesmo para um leitor familiarizado com a teoria das categorias. No capítulo 6, apresentamos a categoria monoidal simétrica que forma a estrutura básica para sistemas clássicos e quânticos. No capítulo 7 damos toda uma abordagem para Mecânica Quântica Categórica, introduzimos a ideia de tensores clássicos e quânticos, as operações de cópia e exclusão e a noção de estruturas de base .

Por fim, o capítulo 8 investigamos as potencialidades na categoria Chu_K.

2 Objetivos

2.1 Objetivo Geral

O presente trabalho tem como objetivo geral de investigar o possível uso em Mecânica Quântica da categoria de espaço de Chu sobre um corpo $\mathbb{K}$. Analisar e Explorar as diferentes estruturas categóricas para Chu e sugerir possíveis soluções para se obter um funtor relevante à utilização em sistemas quânticos.

2.2 Objetivos Específicos

- Realizar uma introdução sucinta da Teoria das Categorias (ABRAMSKY; COECKE, 2004; COECKE; DUNCAN, 2008; COECKE, 2011);
- Introduzir a noção da Categoria Chu_K, a categoria dos Espaços de Chu;
- Investigar quais propriedades da mecânica quântica podemos modelar utilizando estas categorias, bem como o que parece natural;
- Saber como isso pode ser usado para dar uma perspectiva diferente sobre Mecânica Quântica, ou como uma ferramenta de computação quântica;
- Compreender o espaço de Chu, como pode ser usado na mecânica quântica no futuro e onde o estudo futuro pode ser melhor focalizado.

3 Introdução a Teoria das Categorias

O que é Teoria das Categorias?

Como uma primeira aproximação, pode-se dizer que a teoria das categorias é o estudo matemático da álgebra (abstrata) de funções. Assim como a teoria de grupos é a abstração da ideia de um sistema de permutações de um conjunto ou simetrias de um objeto geométrico, teoria das categorias surge da ideia de um sistema de funções entre alguns objetos.

A principal força por trás do desenvolvimento da teoria das categorias é a sua capacidade de unificar conceitos abstratos. Informações gerais sobre as categorias aplicáveis a cada categoria concreta especifica estruturas matemáticas.

Muito do poder da teoria da categoria repousa no fato de refletir sobre si. Por exemplo, veremos neste capítulo que funtores entre duas categorias constitui-se uma categoria: a categoria funtor. Sob a dualidade categórica, esta prepara o palco para tudo em matemática relacionado à álgebra com sua dualidade.

Alguns exemplos, definições e teoremas abordados neste capítulo são explicitamente baseados nos livros de Coecke (2011), Abramsky e Tzevelekos (2011), Barr e Wells (1999), Awodey. (2010), Coecke (2006) e nos seminários de Teoria das Categorias ministrados por mim no segundo semestre de 2014.

Primeiramente, vamos relembrar brevemente a notação de 'seta' para funções entre conjuntos.

Uma função f com domínio X e contradomínio Y é denotada por: $f : X \to Y$.

$$X \xrightarrow{f} Y\,.$$

A operação fundamental em funções é a *composição*: Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, então podemos definir

$$g \circ f : X \to Z, \quad g \circ f(x) := g(f(x)).$$

Observe que, para que a composição seja definida, o contradomínio de f deve ser o mesmo que o domínio de g.

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z\,.$$

E, para cada conjunto X, há uma função de identidade em relação a X, que é designado por:

$$id_X : X \to X, \quad id_X(x) := x.$$

Essas operações são regidas pelas leis da associatividade e da unidade: $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)\,, \quad f \circ id_X = f = id_Y \circ f\,.$$

Observe que estas equações são formuladas puramente em termos de operações algébricas sobre as funções, sem qualquer referência aos elementos dos conjuntos. Vamos agora dar um primeiro passo para aprender a "pensar com setas", podendo ver como podemos substituir algumas definições familiares em funções redigidos em termos de elementos equivalentes para "teoria da seta."

Dizemos que uma função $f : X \to Y$ é:

$$\begin{array}{lll} \textit{1. injetiva} & \text{se} & \forall x, x' \in X. \quad f(x) = f(x') \implies x = x'\,, \\ \textit{2. sobrejetiva} & \text{se} & \forall y \in Y. \quad \exists x \in X.\, f(x) = y\,, \\ & & \\ \textit{3. mônico} & \text{se} & \forall g, h. \quad f \circ g = f \circ h \implies g = h\,, \\ \textit{4. épico} & \text{se} & \forall g, h. \quad g \circ f = h \circ f \implies g = h\,. \end{array}$$

Podemos considerar uma equivalência entre as definições acima. Contudo, note que a injetividade e sobrejetividade são formulados em termos de elementos, enquanto épico e mônico são de ‘teoria da seta’. Consideremos tal equidade através da seguinte proposição.

Proposição 3.1. *Seja $f : X \to Y$. Segue que,*

1. *f é injetiva sse f é mônico.*

2. *f é sobrejitiva sse f é épico.*

Prova. Item 1: ($\Rightarrow$) Suponha a função $f : B \to C$ injetiva e para as "setas"$g, h : A \to B$ temos que $f \circ g(a) = f \circ h(a)$ para todo $a \in A$. Pela definição de injetividade, isto implica que $g(a) = h(a)$ para todo $a \in A$, ou seja, $g = h$. ($\Leftarrow$) Usando a contra-positiva, suponha agora que f não é injetiva, então existe dois elementos distintos $b_1, b_2 \in B$ para qual $f(b_1) = f(b_2)$. Defina $g, h : B \to B$ por

$$g(b) = b \quad \text{e} \quad h(b) = \begin{cases} b, & \text{se} \quad b \neq b_1, \\ b_2, & \text{se} \quad b = b_1. \end{cases}$$

Então claramente, $f \circ g(b) = f(b)$ para todo $b \in B$. Também, $f \circ h(b) = f(b)$ para $b \neq b_1$, pois $f \circ h(b_1) = f(b_2) = f(b_1)$, assim $f \circ g(b) = f \circ h(b)$ para todo $b \in B$, ou seja, $f \circ g = f \circ h$ apesar de $g \neq h$. Portanto, f não é mônico.

Item 2: ($\Rightarrow$) Suponha a função $f : A \to B$ sobrejetiva e para as setas $g, h : B \to C$ temos que $g \circ f(a) = h \circ f(a)$ para todo $a \in A$. Como f é sobrejetiva, todo $b \in B$ pode ser escrito como $f(a)$ para algum $a \in A$ e isto implica que $g(b) = h(b)$ para todo $b \in B$, ou seja, $g = h$. Em outras palavras, f é épico. ($\Leftarrow$) Novamente, usando a contra-positiva. Vamos assumir que f não é sobrejetiva, então existe pelo menos um elemento $b_1 \in B$ que não é igual a $f(a)$ para algum $a \in A$. Escolha qualquer outro elemento $b_2 \in B$ e defina $g, h : B \to B$ por:

$$g(b) = b \quad \text{e} \quad h(b) = \begin{cases} b, & \text{se} \quad b \neq b_1, \\ b_2, & \text{se} \quad b = b_1. \end{cases}$$

Então, $g \circ f(a) = f(a)$ para todo $a \in A$ e também, uma vez que nenhum elemento de A é mapeado para b_1 temos que $h \circ f(a) = f(a)$ para todo $a \in A$, assim $g \circ f = h \circ f$. Mas é evidente que $g \neq h$, pois $g(b_1) \neq h(b_1)$. Logo, f não é épico. ■

Vimos as propriedades de funções que queremos considerar para a noção abstrata de função: composição e identidade. Assim, queremos agora "abstrair"o todo, por assim dizer. Isso é o que é realizado pela seguinte definição.

Definição 3.1. *Uma **categoria** $\mathcal{C}$ é composta de:*

- *Uma coleção $Ob(\mathcal{C})$ de* objetos*: A, B, C, etc.*
- *Uma coleção $Ar(\mathcal{C})$ de* setas *(ou* morfismos*): f, g, h, etc.*
- *Mapeamento $dom, cod : Ar(\mathcal{C}) \to Ob(\mathcal{C})$, que atribui a cada seta f seu* domínio *$dom(f)$ e seu* contradomínio *$cod(f)$. Uma seta f com domínio A e contradomínio B é escrito $f : A \to B$. Para cada par de objetos A, B, definimos o conjunto*

  $$\mathcal{C}(A, B) := \{f \in Ar(\mathcal{C}) \mid f : A \to B\} .$$

  Referimo-nos a $\mathcal{C}(A, B)$ como um hom-set*.*

- *Para qualquer tripla de objetos A, B, C, uma* composição *de mapa*

  $$c_{A,B,C} : \mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \longrightarrow \mathcal{C}(A, C) .$$

  $c_{A,B,C}(f, g)$ é denotado por $g \circ f$ ou:

  $$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

- *Para cada objeto A, uma seta* identidade $id_A : A \to A$.
  Que satisfaz os seguinte axiomas:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f;$$

$$f \circ id_A = f = id_B \circ f\ .$$

Uma ferramenta importante na teoria das categorias é a representação por diagramas. Dizer que o seguinte triângulo comuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

é exatamente equivalente a afirmar a equação $g \circ f = h$.

Da mesma forma, dizer que o seguinte quadrado comuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "k"'] & D \end{tikzcd}$$

significa que $g \circ f = k \circ h$.

Assim, podemos representar as equações:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f\ , \qquad f \circ id_A = f = id_B \circ f\ ,$$

usando os seguintes diagramas comutativos, respectivamente:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h\circ g"] & \\ & C \arrow[r, "h"'] & D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "id_A"] \arrow[dr, "f"'] & A \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "f"] & \\ & B \arrow[r, "id_B"'] & B \end{tikzcd}$$

3.1 Exemplos de Categorias

Primeiramente, vamos apresentar o básico sobre ordens parciais, monóides e topologias, o que fornecerá exemplos recorrentes ao longo deste trabalho.

- Ordens Parciais

Definição 3.2. *Uma* ordem parcial *é uma estrutura* $(P, \leq)$, *onde* P *é um conjunto e* $\leq$ *é uma relação binária em* P *satisfazendo:*

- $x \leq x$ *(Reflexiva)*
- $x \leq y \ \wedge y \leq x \ \ \Rightarrow \ \ x = y$ *(Antissimetria)*
- $x \leq y \ \wedge \ y \leq z \ \ \Rightarrow \ \ x \leq z$ *(Transitividade)*

Se P, Q são ordens parciais, um mapa $h : P \to Q$ é um homomorfismo de ordem parcial (ou função monótona) se:

$$\forall x, y \in P. \quad x \leq y \implies h(x) \leq h(y)\,.$$

Assim, podemos observar que os homomorfismos são fechados sob a composição, e que os mapas de identidade são homomorfismos.

- **Monóides**

Definição 3.3. *Um monóide é uma estrutura* $(M, \cdot, 1)$ *onde* M *é um conjunto,* $- \cdot - : M \times M \longrightarrow M$ *é uma operação binária,* $1 \in M$*, satisfazendo os seguintes axiomas:*

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)\,, \quad 1 \cdot x = x = x \cdot 1\,.$$

Se M, N são monóides, um mapa $h : M \to N$ é um *homomorfismo monóide* se

$$\forall m_1, m_2 \in M. \quad h(m_1 \cdot m_2) = h(m_1) \cdot h(m_2)\,, \quad h(1) = 1\,.$$

- **Espaço Topológico**

Definição 3.4. *Um espaço topológico é um par* (X, T_X) *onde* X *é um conjunto e* T_X *é uma família de subconjuntos* X *de tal modo que:*

– $\varnothing, X \in T_X$,

– *se* $U, V \in T_X$ *em seguida,* $U \cap V \in T_X$,

– *se* $\{U_i\}_{i \in I}$ *é qualquer família em* T_X*, em seguida,* $\bigcup_{i \in I} U_i \in T_X$.

Um mapa contínuo $f : (X, T_X) \to (Y, T_Y)$ é uma função $f : X \to Y$ tal que, para todo $U \in T_Y$, $f^{-1}(U) \in T_X$.

Vejamos agora alguns exemplos de categorias.

1. Qualquer tipo de estrutura matemática e as funções que as preservam, formam uma categoria. Estas são chamadas de *Categorias Concretas*, exemplos deste tipo que você pode já estar familiarizado.

    - **Set** $\rightarrow$ Conjuntos e Funções;
    - **Mon** $\rightarrow$ Monóides e Homomorfismos Monóides;
    - **Grp** $\rightarrow$ Grupos e Homomorfismos de Grupo;
    - $Vect_K$ $\rightarrow$ Espaços Vetoriais sobre um corpo K e Mapas Lineares;
    - **Pos** $\rightarrow$ Conjuntos Parcialmente Ordenados e Funções Monótonas;
    - **Top** $\rightarrow$ Espaços Topológicos e Funções Contínuas;

2. **Rel** $\rightarrow$ Objetos são conjuntos, as setas $R : X \rightarrow Y$ são *relações* $R \subseteq X \times Y$. Onde a composição relacional, denotada por $R; S$, é dada por:

$$R; S(x, z) \iff \exists y.\, R(x, y) \;\wedge\; S(y, z)$$

3. Seja K um corpo (por exemplo, os números reais ou complexos). Considere a seguinte categoria $\mathbf{Mat}_K$. Os objetos são números naturais. Um morfismo $M : \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{m}$ é uma matriz $\mathbf{n} \times \mathbf{m}$,com entradas em K.

4. Monóides são categorias com apenas um objeto. As setas correspondem aos elementos do monóide, com a operação do monóide sendo composição de seta e a unidade do monóide sendo a seta identidade.

5. A categoria em que para cada par de objetos A, B, há no máximo um morfismo de A para B é de fato uma pré-ordem: uma relação reflexiva e transitiva.

3.2 Noções Básicas

Muitas noções matemáticas importantes podem ser expressas no nível geral de categorias.

Definição 3.5. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Um morfismo $f : X \rightarrow Y$ em $\mathcal{C}$ é:*

- mônico *(ou um* monomorfismo*) se $f \circ g = f \circ h \Longrightarrow g = h$;*
- épico *(ou um* epimorfismo*) se $g \circ f = h \circ f \Longrightarrow g = h$.*

3.2.1 Isomorfismo

A definição de isomorfismo é o nosso primeiro exemplo de uma categoria teórica, uma definição abstrata de uma noção importante. É abstrato, no sentido de utilizar apenas as noções teóricas de categorias, ao invés de algumas informações adicionais sobre os objetos e setas. Além disso, tem a vantagem sobre as outras definições, pois se aplica em qualquer categoria.

Definição 3.6. *Um isomorfismo em $\mathcal{C}$ é uma seta $i : A \to B$ de tal modo que existe uma seta $j : B \to A$ (o inverso de i) satisfazendo:*

$$j \circ i = id_A, \quad i \circ j = id_B.$$

Denota-se isomorfismos por $i : A \xrightarrow{\cong} B$ e escreve i^{-1} para o inverso da i. Dizemos que A e B são isomorfos, $A \cong B$, se existir algum $i : A \xrightarrow{\cong} B$.

Assim, temos a noção fundamental de isomorfismo de uma forma que aplica-se a todos os contextos matemáticos. Este é um primeiro interesse do nível de generalidade que a teoria das categorias proporciona naturalmente. Já identificamos monóides como categorias de um objeto. Agora podemos identificar grupos como exatamente essas categorias de um objeto em que cada seta é um isomorfismo. Isto também leva a uma generalização natural, de considerável importância em matemática atual:

Grupóide: Categoria em que cada morfismo é um isomorfismo.

3.2.2 Categoria Oposta e Dualidade

A direcionalidade das setas dentro de uma categoria $\mathcal{C}$ pode ser invertida sem quebrar as condições de ser uma categoria, isso gera a noção de *categoria oposta*.

Definição 3.7. *Dada uma categoria $\mathcal{C}$, a categoria oposta (ou 'dual') $\mathcal{C}^{OP}$ tem os mesmos objetos que $\mathcal{C}$, e*

$$\mathcal{C}^{OP}(A, B) := \mathcal{C}(B, A).$$

Composição e identidades são herdadas de $\mathcal{C}$.

Observe que, se tivermos:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

em $\mathcal{C}^{op}$, isso significa

$$A \xleftarrow{f} B \xleftarrow{g} C$$

em $\mathcal{C}$, assim a composição $g \circ f$ em $\mathcal{C}^{OP}$ é definido como $f \circ g$ em $\mathcal{C}$.

Exemplo 3.1. *Se P é uma pré-ordem, por exemplo $(\mathbb{Z}, \leq)$, então P^{op} é dado por $(\mathbb{Z}, \geq)$.*

Principio de Dualidade

Considerações de categorias opostas levam a um princípio de dualidade: Uma declaração S é verdade sobre $\mathcal{C}$ se e somente se seu dual (ou seja, aquele obtido a partir de S, invertendo todas as setas) é verdade sobre $\mathcal{C}^{op}$.

Por exemplo, um morfismo f é mônico em $\mathcal{C}^{op}$ se e somente se é épico em $\mathcal{C}$. De fato, f é monico em $\mathcal{C}^{op}$ sse para todo $g, h : C \to B$ em $\mathcal{C}^{op}$,

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h\,,$$

sse para todo $g, h : B \to C$ em $\mathcal{C}$,

$$g \circ f = h \circ f \implies g = h\,,$$

sse f é épico em $\mathcal{C}$. Dizemos que mônico e épico são noções duais.

3.2.3 Subcategorias

Outra maneira de obter novas categorias de antigas é restringindo seus objetos ou setas.

Definição 3.8. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Suponha que nos é dado coleções*

$$Ob(\mathcal{D}) \subseteq Ob(\mathcal{C})\,, \quad \forall A, B \in Ob(\mathcal{D}).\ \mathcal{D}(A,B) \subseteq \mathcal{C}(A,B)\,.$$

Dizemos que $\mathcal{D}$ é uma subcategoria de $\mathcal{C}$ se

$$A \in Ob(\mathcal{D}) \;\Rightarrow\; id_A \in \mathcal{D}(A,A),$$

$$f \in \mathcal{D}(A,B), g \in \mathcal{D}(B,C) \;\Rightarrow\; g \circ f \in \mathcal{D}(A,C)\,,$$

e, portanto, $\mathcal{D}$ é uma categoria.

Em particular, $\mathcal{D}$ é:

- Uma subcategoria *full* de $\mathcal{C}$ se para quaisquer $A, B \in Ob(\mathcal{D})$, $\mathcal{D}(A,B) = \mathcal{C}(A,B)$.
- Uma subcategoria *lluf* de $\mathcal{C}$ se $Ob(\mathcal{D}) = Ob(\mathcal{C})$.

Exemplos

1. A categoria de conjuntos finitos forma uma subcategoria *full* da categoria de conjuntos (**Set**);

2. **Grp** é uma subcategoria *full* de **Mon**;

3. **Set** é uma subcategoria *lluf* de **Rel**;

4. A categoria de grupos abelianos (**Ab**) forma uma subcategoria *full* da categoria de grupos (**Grp**).

Categorias 'simples'

Encerramos esta seção com alguns exemplos básicos de categorias.

- $\mathbf{1}$ é a categoria com um objeto e uma seta, isto é,

$$\mathbf{1} := \begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop below] \end{tikzcd}$$

onde a seta é necessariamente $id_\bullet$. Note que, apesar de dizer que $\mathbf{1}$ é *a* categoria de um objeto e uma seta, não é de modo algum *única*. Isto é explicado pelo fato intuitivamente evidente que quaisquer duas de tais categorias são isomorfas. Definiremos o que significa dizer categorias serem isomorfas mais tarde.

- Nas categorias de dois objetos, existe uma com duas setas, $\mathbf{2} := \bullet \quad \bullet$, e também:

$$\mathbf{2}_\to := \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd} \quad , \quad \mathbf{2}_\rightrightarrows := \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] & \bullet \end{tikzcd} \quad , \quad \mathbf{2}_\rightleftarrows := \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left] & \bullet \arrow[l, bend left] \end{tikzcd} \quad \ldots$$

Observe que omitimos as setas de identidade. Categorias com apenas setas de identidade, como $\mathbf{1}$ e $\mathbf{2}$, são chamadas de *Categorias Discretas.*

3.3 Algumas Construções Básicas

Começamos com algumas observações sobre as definições da Teoria das categorias, estas são caracterizações de propriedades de objetos e flechas em uma categoria apenas em termos de outros objetos e flechas, ou seja, apenas na linguagem categórica. Vamos agora olhar para uma série de construções básicas que aparecem na matemática e que adquirem a sua forma geral adequada na linguagem das categorias.

3.3.1 Objetos iniciais e terminais

As duas primeiras construções triviais é a de objeto inicial e terminal, que será muito útil adiante.

Definição 3.9. *Um objeto I em uma Categoria $\mathcal{C}$ é **inicial** se, para cada objeto A, existe uma seta única de I para A, que escrevemos $\iota_A : I \to A$.*

Definição 3.10. *Um objeto T em uma Categoria $\mathcal{C}$ é **terminal** se, para cada objeto A, existe uma seta única de A para T, que escrevemos $\tau_A : A \to T$.*

Notação 3.1. *Utilizamos muitas vezes o 1 para o objeto terminal e 0 para do inicial.*

Observe que os objetos iniciais e finais são noções duais: T é o terminal em $\mathcal{C}$ sse é inicial na $\mathcal{C}^{op}$.

Exemplos

1. Em **Set**, o conjunto vazio é um objeto inicial, enquanto qualquer conjunto de um elemento $\{\bullet\}$ é terminal. Observe que **Set** tem apenas um objeto inicial, mas muitos objetos terminais.

2. Em **Pos**, a ordem parcial $(\varnothing, \varnothing)$ é um objeto inicial, enquanto $(\{\bullet\}, \{(\bullet, \bullet)\})$ é terminal.

3. Em **Top**, o espaço $(\varnothing, \{\varnothing\})$ é um objeto inicial, enquanto $(\{\bullet\}, \{\varnothing, \{\bullet\}\})$ é terminal.

4. Em $\mathbf{Vect}_k$, o espaço de um elemento 0 é inicial e terminal.

5. Em um poset, visto como uma categoria, um objeto inicial é o menor elemento, enquanto um objeto terminal é o maior elemento. Assim, por exemplo, qualquer álgebra booleana (MENDELSON, 1977) tem ambos. Obviamente, uma categoria não precisa ter tanto um objeto inicial ou um objeto terminal; Por exemplo, a ordem parcial $(\mathbb{Z}, \leq)$ não tem nenhuma.

6. Em **Cat** a categoria **0** (não há objectos e não há setas) é inicial e a categoria **1** (um objeto e sua seta de identidade) é terminal.

A prova da seguinte proposição, enquanto elementar, é um primeiro exemplo de raciocínio distintamente categórico.

Proposição 3.2. *Se I e I' são objetos iniciais na categoria $\mathcal{C}$ então existe uma isomorfismo único $I \approx I'$.*

Prova. I e I' são objetos iniciais então:

- I é objeto inicial, existe um único morfismo $i_I : I \to I'$.

- Analogamente, I' é objeto inicial então existe um único morfismo $i_{I'} : I' \to I$.

Compondo os seguintes morfismo temos que

$$i_{I'} \circ i_I : I \to I \quad \text{e} \quad i_I \circ i_{I'} : I' \to I'.$$

Como I é inicial, existe um único morfismo com domínio e contradomínio I. Analogamente para I'. Logo, $i_{I'} \circ i_I = id_I$ e $i_I \circ i_{I'} = id_{I'}$.

$$\therefore \text{I e I' são isomorfos.}$$

■

3.3.2 Produto e Co-produto

1. Produto

Em seguida, vamos ver a definição categórica de um produto de dois objetos em uma categoria. Isto foi dado pela primeira vez pelo Mac Lane em 1945 (EILENBERG; LANE, 1945), e é provavelmente o mais antigo exemplo da teoria da categoria a ser usado para definir uma noção matemática fundamental.

Mais uma vez usaremos uma noção geral para definir produto, significativo em qualquer categoria, e de tal forma que, se um produto existe, é caracterizado unicamente, a menos de isomorfismo único, assim como foi para objetos iniciais e terminais. Dado um contexto matemático particular, ou seja, uma categoria, podemos então verificar se o produto existe ou não nessa categoria.

Na teoria dos conjuntos, o produto cartesiano é definido em termos de pares ordenados:

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X \; e \; y \in Y\}.$$

Acontece que pares ordenados podem ser definidos na teoria dos conjuntos, por exemplo, como:

$$(x, y) := \{\{x, y\}, y\}.$$

Assim, temos as propriedades essenciais de pares ordenados:

1. Podemos obter o primeiro e segundo componentes x, y do par ordenado (x, y), permitindo as *funções de projeção* a serem definidas:

$$\pi_1 : (x, y) \mapsto x, \qquad \pi_2 : (x, y) \mapsto y\,.$$

2. A informação sobre as primeiras e segundas componentes determina completamente o par ordenado:

$$(x_1, x_2) = (y_1, y_2) \iff x_1 = y_1 \text{ e } x_2 = y_2.$$

3. A definição categórica expressa essas propriedades em termos de "teoria das setas", e é significativa em qualquer categoria.

Definição 3.11. *Sejam A, B objetos de uma categoria $\mathbf{C}$. Um **produto** de A e B consiste de:*

1. *um objeto $A \times B \in \mathbf{C}$;*

2. *um par de morfismos, π_1 e π_2, $A \overset{\pi_1}{\leftarrow} A \times B \overset{\pi_2}{\rightarrow} B$*

tal que para cada tripla $A \overset{f}{\leftarrow} C \overset{g}{\rightarrow} B$ existe um único morfismo

$$< f, g >: C \longrightarrow A \times B$$

de tal modo que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B \\ & C \arrow[ul, "f"] \arrow[u, dashed, "<f,g>"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{pmatrix} \pi_1 \circ < f, g >= f \\ \pi_2 \circ < f, g >= g \end{pmatrix}$$

Além disso, para todo A, B e $C \in \mathbf{C}$, a operação

$$(\pi_1 \circ -, \pi_2 \circ -) : \mathbf{C}(C, A \times B) \to \mathbf{C}(C, A) \times \mathbf{C}(C, B)$$

admite uma inversa $< -, - >_{C,A,B}$.

Exemplos Olhamos como esta definição funciona em nossas categorias de exemplos canônicos.

1. Em **Set**, os produtos são os produtos cartesianos habituais.

2. Em **Pos**, os produtos são produtos cartesianos com a ordem pontual.

3. Em **Top**, os produtos são produtos cartesianos com a topologia produto.

4. Em $\mathbf{Vect}_k$, os produtos são somas diretas.

5. Em um poset, visto como uma categoria, os produtos são maiores limites inferiores.

2.Co-Produto

Definimos o co-produto de modo análogo usando a união disjunta $\oplus$.

Definição 3.12. *Sejam A, B objetos de uma categoria $\mathbf{C}$. Um **co-produto** de A e B consiste de:*

1. *um objeto $A + B \in \mathbf{C}$;*
2. *um par de morfismos, ι_1 e ι_2, $A \overset{\iota_1}{\to} A + B \overset{\iota_2}{\leftarrow} B$*

tal que, para cada tripla $A \overset{f}{\to} C \overset{g}{\leftarrow} B$ existe um único *morfismo $[f, g] : A + B \longrightarrow C$ de tal forma que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[dr, "f"'] & A + B \arrow[d, dashed, "{[f,g]}"'] & B \arrow[l, "\iota_2"'] \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd} \quad \begin{pmatrix} [f, g] \circ \iota_1 = f \\ [f, g] \circ \iota_2 = g \end{pmatrix}$$

Além disso, para todo A, B e $C \in \mathbf{C}$, a operação

$$(- \circ \iota_1, - \circ \iota_2) : \mathbf{C}(A + B, C) \to \mathbf{C}(A, C) \times \mathbf{C}(B, C)$$

admite uma inversa $< -, - >_{C,A,B}$.

Exemplos

1. Em **Set**, a união disjunta de conjuntos: $X + Y := \{1\} \times X \cup \{2\} \times Y$ Podemos definir injeções

$$X \xrightarrow{[1]} X + Y \xleftarrow{[2]} Y$$
$$\mathsf{in}_1(x) := (1, x)\,, \qquad \mathsf{in}_2(y) := (2, y)$$

   Dadas as funções $f : X \longrightarrow Z$ e $g : Y \longrightarrow Z$, podemos definir

$$[f, g] : X + Y \longrightarrow Z$$
$$[f, g](1, x) := f(x)\,, \qquad [f, g](2, y) := g(y)$$

2. Em **Pos**, uniões disjuntas (com as ordens herdadas) são co-produtos.
3. Em **Top**, uniões topologicas disjuntas são co-produtos.
4. Em $\mathbf{Vect}_k$, somas diretas são co-produtos.
5. Em a poset, *limites mínimos superiores* são co-produtos.

3.3.3 Pullbacks e Equalizador

Pullbacks (Produto Fibrado)

A noção de *Pullbacks*, como a de um produto, é aquele que surge muitas vezes em matemática e lógica. É uma generalização de interseção e imagem inversa. Vamos definir formalmente.

Definição 3.13. *Considere um par de morfismos* $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$. *O* ***pullback*** *de f ao longo de g é um par* $A \xleftarrow{p} D \xrightarrow{q} B$ *de tal modo que* $f \circ p = g \circ q$ *e, para qualquer par* $A \xleftarrow{p'} D' \xrightarrow{q'} B$ *temos que* $f \circ p' = g \circ q'$, *existe uma única* $h : D' \to D$ *tal que* $p' = p \circ h$ *and* $q' = q \circ h$.

Diagramaticamente,

$$\begin{tikzcd}
D' \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "q'"] \arrow[ddr, bend right, "p'"'] & & \\
& D \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"] & C
\end{tikzcd}$$

Exemplo 3.2. *Em* ***Set*** *o pullback de* $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ *é definido como um* subconjunto do produto cartesiano*:*

$$A \times_C B \; = \; \{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = g(b)\}.$$

Exemplo 3.3. *Considere uma categoria* $\mathcal{C}$ *com*

$$Ar(\mathcal{C}) \xrightarrow{dom} Ob(\mathcal{C}) \xleftarrow{cod} Ar(\mathcal{C})$$

Então o pullback de dom ao longo de cod é o conjunto de morfismos combináveis*, isto é, pares de morfismos* (f, g) *em* $\mathcal{C}$ *de tal modo que* $f \circ g$ *está bem definida.*

Pullbacks como Objetos Terminais de uma Categoria

Dado um par de morfismos $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$, vamos definir um (f, g)–*cone* como sendo uma tripla (D, p, q) de maneira que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

Um morfismo de (f, g)-cones $h : (D_1, p_1, q_1) \to (D_2, p_2, q_2)$ é um morfismo $h : D_1 \to D_2$ de tal modo que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{tikzcd} & D_1 \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "q_1"] & \\ A & D_2 \arrow[l, "p_2"] \arrow[r, "q_2"'] & B \end{tikzcd}$$

Podemos formar uma categoria $\mathbf{Cone}(f, g)$. Um pullback de f ao longo de g, se existe, é exatamente um objeto terminal de $\mathbf{Cone}(f, g)$.

Equalizadores

Agora vamos considerar uma outra caracterização abstrata.

Definição 3.14. *Considere um par de setas paralelas* $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$. *Um **equalizador** de* (f, g) *é uma seta* $e : E \to A$ *tal que* $f \circ e = g \circ e$ *e, para qualquer seta* $h : D \to A$ *tal que* $f \circ h = g \circ h$, *existe uma única* $\hat{h} : D \to E$ *tem-se* $h = e \circ \hat{h}$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ D \arrow[u, dashed, "\hat{h}"] \arrow[ur, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

Exemplo 3.4. *Em Set, o equalizador de* f, g *é dada pela inclusão*

$$\{x \in A \mid f(x) = g(x)\} \hookrightarrow A\,.$$

Isto permite que a noção de subconjuntos definidos equacionalmente seja definida como equalizadores. Por exemplo, considere o par de mapas

$$\mathbb{R}^2 \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} \mathbb{R}$$

onde

$$f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2, \qquad g : (x, y) \mapsto 1\,.$$

O equalizador é o círculo unitário como um subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

3.3.4 Funtor

Não devemos olhar só para os objetos, devemos também olhar para as setas ou "mapeamentos"entre as categorias. Um ‘morfismo de categorias’ é um *funtor*.

Definição 3.15. *A* ***funtor*** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *é dado por:*

- *Um mapa-objeto, atribuindo um objeto* FA *de* $\mathcal{D}$ *para cada objeto* A *de* $\mathcal{C}$*.*
- *Um mapa-seta, atribuindo uma seta* $Ff : FA \to FB$ *de* $\mathcal{D}$ *para cada seta* $f : A \to B$ *de* $\mathcal{C}$*, de tal forma que a composição e as identidades são preservadas:*

$$F(g \circ f) = Fg \circ Ff\,, \qquad Fid_A = id_{FA}.$$

Uma vez que funtores preservam o domínios e o contradomínio de setas, para cada par de objetos A, B de $\mathcal{C}$, temos uma estrutura bem definida.

$$F_{A,B} : \mathcal{C}(A, B) \to \mathcal{D}(FA, FB)$$

As condições que expressam a preservação de identidade e composição são chamadas de **funtorialidade.**

Exemplos

1. (**Posets**) Sejam $(P, \leq)$, $(Q, \leq)$ ordens parciais (vistos como categorias).
   Um funtor $F : (P, \leq) \to (Q, \leq)$ é especificado por um mapa-objeto, digamos $F : P \to Q$, e um apropriado mapa-seta. O mapa-seta corresponde à condição:

$$\forall p_1, p_2 \in P. \quad p_1 \leq p_2 \implies F(p_1) \leq F(p_2)\,,$$

   isto é, a monotonicidade de F. Além disso, as condições de funtorialidade são triviais, uma vez que no contradomínio $(Q, \leq)$ todos os conjuntos de homomorfismos são unitários. *Um funtor entre Ordens Parciais é apenas um mapa monótono.*

2. (**Monóides**) Sejam $(M, \cdot, 1)$, $(N, \cdot, 1)$ monóides.
   Um funtor $F : (M, \cdot, 1) \to (N, \cdot, 1)$ é especificado por um mapa-objeto trivial (monóides são categorias com um único objeto) e um mapa-seta, dado por $F : M \to N$. As condições de funtorialidade correspondem a

$$\forall m_1, m_2 \in M. \quad F(m_1 \cdot m_2) = F(m_1) \cdot F(m_2)\,, \qquad F(1) = 1\,,$$

   isto é, F é um homomorfismo de monoides. *Um funtor entre monóides é apenas um homomorfismo de monóides.*

Funtor esquecimento

"Esquece"a estrutura de um conjunto com estrutura, levando-o ao conjunto suporte e os homomorfismos a função correspondente. Assim, U : **Mon** $\to$ **Set** é o funtor esquecimento de **Mon** a **Set**.

Funtores "de diversas variáveis"

Definição 3.16. *Para as categorias $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ definimos o* **produto de categorias** *$\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ do seguinte modo. Um objeto em $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ é um par de objetos a partir de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, e uma seta em $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ é um par de setas de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$. Identidades e composição de seta são definidos componentes a componentes:*

$$id_{(A,B)} := (id_A, id_B)\,, \qquad (f,g) \circ (f', g') := (f \circ f', g \circ g')\,.$$

Assim, *um funtor 'de duas variáveis'*, com domínios $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, a $\mathcal{E}$ é simplesmente um funtor:

$$F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}\,.$$

Por exemplo, existem evidentes *funtores projeção*

$$\mathcal{C} \longleftarrow \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}\,.$$

Exemplos Funtores valorados - Set $F : \mathcal{C} \to Set$.

1. Se G é um Grupo, um funtor $F : G \to \textbf{Set}$ é uma *ação de G sobre um conjunto.* Para um Grupo $(G, \cdot, 1)$, um funtor $F : G \to \textbf{Set}$ é especificado por um conjunto X (ao qual o objeto único de G é mapeado), e por uma mapa-seta enviando cada elemento m de G a uma *endofunção* sobre X, digamos $m \bullet \_ : X \to X$. Então, funtorialidade equivale a

   $$\forall m_1, m_2 \in G. \quad F(m_1 \cdot m_2) = F(m_1) \circ F(m_2)\,, \qquad F(1) = id_X\,,$$

   isto é, para todos $m_1, m_2 \in G$ e todo $x \in X$,

   $$(m_1 \cdot m_2) \bullet x = m_1 \bullet m_2 \bullet x\,, \qquad 1 \bullet x = x\,.$$

   Vemos, pois, que F define uma ação de G em X.

2. Se P é um poset representando o tempo, um funtor $F : P \to \textbf{Set}$ é uma noção de *conjunto variando ao longo do tempo.* Isto está relacionado com a *semântica de Kripke* (KRIPKE, 1963).

3. Lembre-se que $\mathbf{2}$ é a categoria $\bullet \rightrightarrows \bullet$. Funtores $F : \mathbf{2} \to \textbf{Set}$ correspondem aos *grafos dirigidos* , isto é, as estruturas (V, E, s, t), onde V é um conjunto de vértices, E é um conjunto de arestas, e $(s, t) : E \to V$ especifica a origem e o destino dos vértices de cada aresta.

Produtos como funtores:

Se uma categoria $\mathcal{C}$ tem produtos binários, então automaticamente existe um funtor

$$\_ \times \_ : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$

que leva cada par (A, B) para o produto $A \times B$, e cada (f, g) a

$$f \times g := \langle f \circ \pi_1, g \circ \pi_2 \rangle \,.$$

Funtorialidade é mostrada a seguir, usando a unicidade de pareamentos em sua forma equacional.

$$\begin{aligned}
(f \times g) \circ (f' \times g') &= (f \times g) \circ \langle f' \circ \pi_1, g' \circ \pi_2 \rangle = \langle f \circ f' \circ \pi_1, g \circ g' \circ \pi_2 \rangle \\
&= (f \circ f') \times (g \circ g') \,, \\
id_A \times id_B &= \langle id_A \circ \pi_1, id_B \circ \pi_2 \rangle = \langle \pi_1 \circ id_{A\times B}, \pi_2 \circ id_{A\times B} \rangle \\
&= id_{A\times B} \,.
\end{aligned}$$

A Categoria das Categoria

Existe uma categoria **Cat** cujos objetos são categorias, e suas setas são funtores. Identidades em **Cat** são dadas por funtores identidade:

$$Id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C} := A \mapsto A,\ f \mapsto f.$$

A composição de funtores é definida de maneira evidente. Note-se que se $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, para $f : A \to B$ em $\mathcal{C}$, temos:

$$G \circ F(f) := G(F(f)) : G(F(A)) \to G(F(B)).$$

Note que os produtos de categorias são produtos em **Cat** Para qualquer par de categorias $\mathcal{C}, \mathcal{D}$, definimos

$$\mathcal{C} \xleftarrow{\pi_1} \mathcal{C} \times \mathcal{D} \xrightarrow{\pi_2} \mathcal{D}$$

onde $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ o produto de categorias (definido anteriormente) e π_i's os funtores projeção. Para qualquer par de funtores $\mathcal{C} \overset{F}{\leftarrow} \mathcal{E} \overset{G}{\rightarrow} \mathcal{D}$, definimos

$$\langle F, G \rangle : \mathcal{E} \to \mathcal{C} \times \mathcal{D} := A \mapsto (FA, GA),\ f \mapsto (Ff, Gf) \,.$$

É fácil ver que $\langle F, G \rangle$ é de fato um funtor. Por outro lado, a satisfação do diagrama e unicidade do produto são mostrados exatamente como em Set.

Funtor covariante

Por definição, o mapa-seta de um funtor F é *covariante* se preserva o sentido das setas, por isso, se $f : A \to B$ segue que $Ff : FA \to FB$. O funtor *contravariante* G faz exatamente o oposto: ele inverte o sentido da seta, por isso, se $f : A \to B$ segue que $Gf : GB \to GA$. Uma maneira concisa de expressar contravariancia é a seguinte definição.

Definição 3.17. *Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Categorias. Um funtor **contravariante** G a partir de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ é um funtor $G : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$. (De forma equivalente, um funtor $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}^{op}$.)*

Explicitamente, um funtor contravariante G é dada por uma atribuição de:

- Um objeto GA em $\mathcal{D}$ para cada objeto A em $\mathcal{C}$,
- uma seta $Gf : GB \to GA$ em $\mathcal{D}$ para cada seta $f : A \to B$ em $\mathcal{C}$, tal que (notar a mudança de ordem na composição):

$$G(g \circ f) = Gf \circ Gg\,, \qquad Gid_A = id_{GA}.$$

Note que funtores 'de várias variáveis' podem ser covariante em algumas variáveis e contravariante em outros, por exemplo,

$$F : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}\,.$$

Exemplo 3.5. *O funtor espaço dual em espaços vetoriais:*

$$(\_)^* : \boldsymbol{Vect_k}^{op} \longrightarrow \boldsymbol{Vect_k} := V \mapsto V^*.$$

Hom-funtores (Homomorfismo de Funtores) Dada uma categoria $\mathcal{C}$ e um objeto A de $\mathcal{C}$, dois funtores para **Set** podem ser definidos:

- O covariante Hom-funtor em A,

$$\mathcal{C}(A, \_) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}\,,$$

  que é dada pela (recordamos que cada $\mathcal{C}(A, B)$ é um conjunto):

$$\mathcal{C}(A, \_)(B) := \mathcal{C}(A, B)\,, \qquad \mathcal{C}(A, \_)(f : B \to C) := g \mapsto f \circ g\,.$$

  Costuma-se escrever $\mathcal{C}(A, \_)(f)$ como $\mathcal{C}(A, f)$. Funtorialidade reduz diretamente a axiomas básicos de categorias: associatividade da composição e a leis de unidade para a identidade.

- Há também um Hom-funtor contravariante,

$$\mathcal{C}(\_\,, A) : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}\,,$$

dado por:

$$\mathcal{C}(\_\,, A)(B) := \mathcal{C}(B, A) \; = C^{op}(A, B), \qquad \mathcal{C}(\_\,, A)(h : C \to B) := g \mapsto g \circ h\,.$$

Generalizar ambos os itens, obtemos um Hom-funtor *bivariante*,

$$\mathcal{C}(\_\,, \_) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}\,.$$

3.3.5 Propriedades de Funtores

Definição 3.18. *Um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é dito ser:*

- ***fiel** (faithful) se cada mapa $F_{A,B} : \mathcal{C}(A, B) \to \mathcal{D}(FA, FB)$ é injetivo;*
- ***pleno** (full) se cada mapa $F_{A,B} : \mathcal{C}(A, B) \to \mathcal{D}(FA, FB)$ é sobrejetivo;*

Definição 3.19. *Um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é dito ser:*

- *uma **imersão** (embedding) se F é full, faithful, e injetivo em objetos;*
- *uma **equivalência** se F é full, faithful, e essencialmente sobrejetivo, isto é, para cada objeto B de $\mathcal{D}$ existe um objeto A de $\mathcal{C}$ de tal modo que $F(A) \cong B$;*
- *um **isomorfismo** se existe um funtor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ de tal modo que*

$$G \circ F = Id_{\mathcal{C}}\,, \qquad F \circ G = Id_{\mathcal{D}}\,.$$

Observação 3.1. *Dizemos que as categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são isomorfas, $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$, se existe um isomorfismo entre eles.*

Exemplos

1. O funtor *monóide livre* dado por $MList : Set \to Mon$ é *faithful*, mas não é *full*.
2. O funtor produto $\_ \times \_ : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ em geral nem é *faithful* e nem *full*.
3. Existe uma equivalência entre $\mathbf{FdVect}_K$, a categoria de espaços vetoriais de dimensão finita sobre o corpo K, e $\mathbf{Mat}_K$, a categoria de matrizes com entradas em K. Note que estas categorias estão muito longe de serem isomorfas!

3.4 Transformações Naturais

Categorias foram introduzidas para permitir que funtores sejam definidos, funtores foram introduzido para permitir que as transformações naturais sejam definidas. Ou seja, uma transformação natural é um morfismo de funtores.

Definição 3.20. *Sejam $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores. Uma **Tranformação Natural***

$$t : F \longrightarrow G$$

é uma família de morfismo em $\mathcal{D}$ indexados por objetos A de $\mathcal{C}$,

$$\{\ t_A : FA \longrightarrow GA\ \}_{A \in Ob(\mathcal{C})}$$

tal que, para todos $f : A \to B$, o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "t_A"'] & FB \arrow[d, "t_B"] \\ GA \arrow[r, "Gf"'] & GB \end{tikzcd}$$

*Esta condição é conhecida como **naturalidade**. Se cada t_A é um isomorfismo, dizemos que t é um **isomorfismo natural**:*

$$t : F \overset{\cong}{\to} G\,.$$

Exemplos

1. Seja Id o funtor identidade em **Set**, e seja $\times \circ \langle Id, Id \rangle$ o funtor levando cada conjunto X a $X \times X$ e cada função f para $f \times f$. Então, há transformação natural $\Delta : Id \longrightarrow \times \circ \langle Id, Id \rangle$ dada por:

$$\Delta_X : X \longrightarrow X \times X := x \mapsto (x, x)\,.$$

A Naturalidade equivale a afirmar que para qualquer função $f : X \to Y$, o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_X"'] & Y \arrow[d, "\Delta_Y"] \\ X \times X \arrow[r, "f \times f"'] & Y \times Y \end{tikzcd}$$

Chamamos Δ a tranformação diagonal em **Set**. De fato, é a *única* transformação natural entre estes funtores.

2. A transformação na diagonal pode ser definida para qualquer categoria $\mathcal{C}$ com produtos binários, definindo, para cada objeto A em $\mathcal{C}$,

$$\Delta_A : A \to A \times A := \langle id_A, id_A \rangle.$$

Também para as transformações naturais das projeções,

$$\pi_{1(A,B)} : A \times B \to A$$

especifica a transformação natural $\pi_1 : \times \to \pi_1$. Observe que $\times, \pi_1 : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ são respectivamente, os funtores para o produto e a primeira projeção.

3. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com objeto terminal T, e seja $K_T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ o funtor mapeando todos os objetos em T e todas as setas em id_T. Em seguida, as setas canônicas

$$\tau_A : A \longrightarrow T$$

especificam a transformação natural $\tau : Id \to K_T$ (onde Id é o funtor identidade em $\mathcal{C}$).

4. Considere o funtor $P := \times \circ \langle U, U \rangle$ com U**:Mon** $\to$ **Set**, isto é,

$$P : \mathbf{Mon} \to \mathbf{Set} := (M, \cdot, 1) \mapsto M \times M,\ f \mapsto f \times f\,.$$

Então a operação de monóide leva a uma transformação natural $t : P \to U$ definida por:

$$t_{(M,\cdot,1)} : M \times M \to M := (m, m') \mapsto m \cdot m'\,.$$

Naturalidade corresponde a afirmar que para qualquer $f : (M, \cdot, 1) \to (N, \cdot, 1)$, o seguinte diagrama comuta,

$$\begin{tikzcd}
M \times M \arrow[r, "f \times f"] \arrow[d, "t_M"'] & N \times N \arrow[d, "t_N"] \\
M \arrow[r, "f"'] & N
\end{tikzcd}$$

Isto é, para qualquer $m_1, m_2 \in M$, $f(m_1) \cdot f(m_2) = f(m_1 \cdot m_2)$.

Isomorfismos naturais para produtos

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com produtos finitos, isto é, produtos binários e um objeto terminal $\mathbf{1}$. Então temos os seguintes isomorfismos naturais canônicos.

$$\begin{aligned} a_{A,B,C} &: A \times (B \times C) \xrightarrow{\sim} (A \times B) \times C\,, \\ s_{A,B} &: A \times B \xrightarrow{\sim} B \times A\,, \\ l_A &: \mathbf{1} \times A \xrightarrow{\sim} A\,, \\ r_A &: A \times \mathbf{1} \xrightarrow{\sim} A\,. \end{aligned}$$

Os dois primeiros isomorfismos é o mesmo que afirmar, respectivamente, que o produto é *associativo* e *simétrico*, e os dois últimos indica que $\mathbf{1}$ é *unidade* do produto. Veremos posteriormente que estas condições fazem parte da definição de **categorias monoidais simétricas** (estrutura fundamental para trabalharmos Mecânica Quântica).

Esses isomorfismos naturais são explicitamente definidos por:

$$\begin{aligned} a_{A,B,C} &:= \langle \langle \pi_1, \pi_1 \circ \pi_2 \rangle, \pi_2 \circ \pi_2 \rangle\,, \\ s_{A,B} &:= \langle \pi_2, \pi_1 \rangle\,, \\ l_A &:= \pi_2\,, \\ r_A &:= \pi_1\,. \end{aligned}$$

Desde que isomorfismos naturais são *auto-duais*, eles podem ser definidos de forma semelhante, se $\mathcal{C}$ tem coprodutos binários e um objeto inicial.

Transformações naturais entre Hom-funtores

Seja $f : A \to B$ numa categoria $\mathcal{C}$. Isso induz uma transformação natural

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(f, \_) &: \mathcal{C}(B, \_) \to \mathcal{C}(A, \_)\,, \\ \mathcal{C}(f, \_)_C &: \mathcal{C}(B, C) \to \mathcal{C}(A, C) := (g : B \to C) \mapsto (g \circ f : A \to C)\,. \end{aligned}$$

Observe que $\mathcal{C}(f, \_)_C$ é o mesmo que $\mathcal{C}(f, C)$, aplicando o resultado do funtor contravariante $\mathcal{C}(\_\,, C)$ para f.

Por isso, a naturalidade equivale a afirmar que para cada $h : C \rightrightarrows D$, o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(B,C) \arrow[r, "\mathcal{C}(B,h)"] \arrow[d, "\mathcal{C}(f,C)"'] & \mathcal{C}(B,D) \arrow[d, "\mathcal{C}(f,D)"] \\ \mathcal{C}(A,C) \arrow[r, "\mathcal{C}(A,h)"'] & \mathcal{C}(A,D) \end{tikzcd}$$

A partir de um $g : B \to C$, calculamos:

$$\mathcal{C}(A, h)(\mathcal{C}(f, C)(g)) = h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = \mathcal{C}(f, D)(\mathcal{C}(B, h)(g))\,.$$

A transformação natural $\mathcal{C}(\_\,, f) : \mathcal{C}(\_\,, A) \to \mathcal{C}(\_\,, B)$ é definido de forma semelhante.

Observação 3.2. *Existe um resultado surpreendente que afima que* toda *transformação natural entre Hom-funtores vem de uma (única) seta em $\mathcal{C}$ na forma descrita acima: Lema de Yoneda (AWODEY., 2010; MANCHESTER,).*

Outra maneira de definir a equivalência de categorias é a seguinte.

Definição 3.21. *Dizemos que as categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são* ***equivalentes****, $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$, se há funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e isomorfismos naturais*

$$G \circ F \cong Id_{\mathcal{C}}\,, \quad F \circ G \cong Id_{\mathcal{D}}\,.$$

Suponha que temos funtores $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e tranformações naturais

$$t : F \to G\,, \quad u : G \to H\,.$$

Então, podemos compor estas transformações naturais, produzindo $u \circ t : F \to H$:

$$(u \circ t)_A := FA \xrightarrow{t_A} GA \xrightarrow{u_A} HA.$$

A composição é associativa, e tem como identidade a transformação natural

$$I_F : F \to F := \{\ (I_F)_A := id_A : FA \to FA\ \}_A\,.$$

Definição 3.22. *Para as categorias $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ define a* ***Categoria Funtor*** $\mathsf{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ *considerando:*

- *Objects: funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$.*
- *Setas: transformação natural $t : F \to G$.*

Composição e identidades são dadas como acima.

Observação 3.3. *Vemos que na categoria* ***Cat*** *de categorias e funtores, cada hom-set* ***Cat***$(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ *tem a estrutura de uma categoria. De fato,* ***Cat*** *é o exemplo básico de uma "2-categoria", isto é, de uma categoria onde hom-sets é por si só uma categoria.*

Continuemos com alguns exemplos de categoria funtor.

1. Lembremos que, para qualquer grupo G, funtores de G para **Set** são G-ações sobre conjuntos. Então, $\mathsf{Func}(G, \mathbf{Set})$ é a categoria de G-ações em conjuntos e *funções equivariantes*: $f : X \to Y$ tal que $f(m \bullet x) = m \bullet f(x)$.

2. $\mathsf{Func}(\mathbf{2}, Set)$: Grafos e homomorfismos de grafos.

3. Se $F, G : P \to Q$ são mapas monótonos entre ordens parciais, então $t : F \to G$ significa que
$$\forall x \in P. \quad Fx \leq Gx\,.$$
Note que neste caso a naturalidade é trivial (hom-sets são 'conjuntos unitários' em Q).

4 Espaço de Chu

Os espaços de Chu fornecem uma representação simples, universal e bem estruturada para uma gama de objetos na matemática. Eles são simples em virtude de serem meramente uma matriz retangular cujas linhas representam pontos, cujas colunas representam estados duais, e cujas entradas são provenientes de um conjunto K.

Espaços de Chu são universais no sentido em que todos os objetos convencionalmente transformáveis da matemática são representável por espaços de Chu dentro de um quadro não tipificado unicamente. Ou seja, podemos generalizar os espaços de Chu para a noção de espaços topológicos, largando os requisitos que o conjunto de conjuntos abertos é fechado sob união e interseção finita, que os conjuntos abertos são extensionais.

Algumas noções que veremos nesta parte inicial são baseadas explicitamente pelas notas de aula de Pratt (1999) e pelo excelente livro de Barr (1979).

De modo geral, um espaço de Chu é simplesmente uma matriz sobre um conjunto K, isto é, um conjunto retangular cujas entradas são retirados de K. Mas, ao contrário das matrizes de álgebra linear, que servem como representações de transformações lineares, espaços de Chu serve como representações dos objetos da matemática, e sua essência reside na forma de como eles se transformam. Vamos formalizar da seguinte forma.

Definição 4.1. *Um espaço de Chu $\mathcal{A} = (A, r, X)$ sobre um conjunto K, consiste em um conjunto A de* pontos*, um conjunto X de* estados*, e uma função $r : A \times X \to K$. (Observar que a função $r : A \times X \to K$. pode ser representada por uma matriz)*

Quando temos $K = \{0, 1\}$, é possível representar uma rica variedade de objetos estruturados como espaços de Chu.

É conveniente visualizar os espaços de Chu organizados seja por linhas ou por colunas. Assim, definimos $\hat{r} : A \to (X \to K)$ como $\hat{r}(a)(x) = r(a, x)$, e referimos a função $\hat{r}(a) : X \to K$ como a linha a de $\mathcal{A}$. Dualmente definimos $\check{r} : X \to (A \to K)$ como $\check{r}(x)(a) = r(a, x)$ e chamamos a função $\check{r}(x) : A \to K$ como a coluna x de $\mathcal{A}$.

- Quando $\hat{r}$ é injetora, isto é, todas as linhas distintas, chamamos $\mathcal{A}$ de **separável**

$$[\forall a_1, a_2 \in A, x \in X. \quad r(a_1, x) = r(a_2, x)] \Rightarrow a_1 = a_2;$$

- similarmente para as colunas, quando $\check{r}$ é injetora, chamamos $\mathcal{A}$ de **extensional**;

$$[\forall x_1, x_2 \in X, a \in A. \quad r(a, x_1) = r(a, x_2)] \Rightarrow x_1 = x_2;$$

- quando $\mathcal{A}$ é ambos separável e extensional chamamos de **biextensional.**

Definimos o **colapso biextensional** de $\mathcal{A} = (A, r, X)$ sendo $(\hat{r}(A), r', \check{r}(X))$ onde $r'(\hat{r}(a), \check{r}(x)) = r(a, x)$. Intuitivamente, o colapso biextensional simplesmente identifica linhas e colunas iguais. No entanto, seus pontos não há mais elementos de A, mas sim funções de X para K, assim como os estados são funções de A para K.

Exemplo 4.1. *Seja o seguinte espaço de Chu com* $K = 2 = \{0, 1\}$, *o conjunto* $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ *e o conjunto de estados sendo* $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$:

	x_1 x_2 x_3 x_4
a_1	*0 1 1 0*
a_2	*1 0 0 1*
a_3	*1 1 1 1*
a_4	*0 1 1 0*
a_5	*1 0 0 1*

Note que este espaço não é separável e nem extensional. Assim, o colapso biextensional é dado por: $A' = \hat{r}(A) = \{0110, 1001, 1111\}$, $X' = \check{r}(X) = \{01101, 10110\}$ *onde* $r(a'_1, x'_1) = r(a'_2, x'_2) = 0$, $r(a'_1, x'_2) = r(a'_2, x'_1) = 1$ *e* $r(a'_3, x'_1) = r(a'_3, x'_2) = 1$, *ou seja, anula-se as linhas e colunas repetidas:*

	x'_1 x'_2
a'_1	*0 1*
a'_2	*1 0*
a'_3	*1 1*

Matrizes possuem um princípio semelhante ao da dualidade de reticulados, assim como a ordem dupla de uma estrutura é uma outra estrutura, a transposta de uma matriz é outra matriz. Denotamos a transposta de $\mathcal{A} = (A, r, X)$ como $\mathcal{A}^{\perp} = (X, \check{r}, A)$ onde $\check{r}(x, a) = r(a, x)$.

Exemplo 4.2. *Seja* $K = 2 = \{0, 1\}$, *dado o conjunto* $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, *temos o seguinte espaço de Chu:*

a_1	*0 1 0 1 0 1 0 1*
a_2	*0 0 1 1 0 0 1 1*
a_3	*0 0 0 0 1 1 1 1*

A principal característica de um conjunto é que seus estados determinam cada ponto de forma independente para assumir qualquer valor de K : todos os K^A (neste caso $2^3 = 8$) possíveis estados são determinados. Portanto, dizemos que o espaço de Chu é ***discreto****, quando o conjunto X corresponde a todas as possibilidades de estados do conjunto X, ou seja o espaço $\mathcal{A} = (A, r, K^A)$.*

Chamamos de espaço de Chu **normal** quando para espaços extensionais, tratamos as colunas como auto-identificação: cada coluna é uma função de A para K, isto é, $X \subseteq K^A$. Usamos a notação abreviada (A, X) com r entendido como uma aplicação, ou seja, $r(a, x)$ é considerado como sendo $x(a)$, cada $x \in X$ sendo agora uma função $x : A \to K$. Para $K = 2$ isto é equivalente a visualizar as colunas como subconjuntos de A, mais precisamente como as funções características desses subconjuntos, com os números $1's$ na coluna que indicam os membros do subconjunto e os $0's$ como os não-membros.

4.1 Categoria Chu_K

A classe de todos os espaços de Chu formam uma categoria, definindo uma noção adequada de morfismo.

Definição 4.2. *A categoria Chu_K tem como seus objetos os espaços de Chu (A, r, X) sobre K, e o morfismo*

$$(f, g) : (A, r, X) \to (B, s, Y)$$

é o par de funções

$$f : A \to B \quad e \quad g : Y \to X$$

tal que para todo $a \in A$ e $y \in Y$, temos:

$$s(f(a), y) = r(a, g(y)).$$

Esta equação constitui uma forma primitiva de adjunção, e, portanto, chamamos como a condição adjunta. *O par (f, g) será chamado de par adjunto. Dado os pares adjuntos $(f, g) : (A, r, X) \to (B, s, Y)$ e $(f', g') : (B, s, Y) \to (C, t, Z)$ a composta é dada por*

$$(f', g') \circ (f, g) = (f' \circ f, g \circ g').$$

Esta composta é por si só um par adjunto pois para todo $a \in A$ e $z \in Z$ temos:

$$t(f' \circ f(a), z) = s(f(a), g'(z)) = r(a, g \circ g'(z))$$

A condição adjunta é reformulada de forma evidente com o diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} A \otimes Y \arrow[r, "f\otimes Y"] \arrow[d, "A\otimes g"'] & B \otimes Y \arrow[d, "s"] \\ A \otimes X \arrow[r, "r"'] & K \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

onde o $\otimes$ é o produto tensorial de espaços de Chu que veremos em detalhe mais adiante.

A associatividade desta composição é herdada da composição em **Set**, de fato, uma vez que a composição é definida explicitamente em termos de morfismos, podemos verificar. Considere os seguintes pares de morfismos:

$$\begin{array}{rll} (f,g): & (A,r,X) & \longrightarrow (B,s,Y) \\ (h,k): & (B,s,Y) & \longrightarrow (C,t,Z) \\ (l,m): & (C,t,Z) & \longrightarrow (D,u,W) \end{array}$$

então,

$$\begin{array}{rcl} ((l,m)\circ(h,k))\circ(f,g) & = & ((l\circ h, k\circ m)\circ(f,g) \\ & = & ((l\circ h)\circ f, g\circ(k\circ m)) \\ & = & (l\circ(h\circ f), (g\circ k)\circ m) \\ & = & (l,m)\circ((h\circ f, g\circ k)). \end{array}$$

Enquanto que o par $(1_A, 1_X)$ de mapas identidades,respectivamente A e X, é a identidade do morfismo em (A, r, X), ou seja, $id_{\mathcal{A}} : (id_A, id_X) : (A, r, X) \to (A, r, X)$. Seus isomorfismos são aqueles morfismos (f, g) para os quais f e g são ambos bijeções.

Definimos uma relação em A:

$$a_1 \simeq a_2 \Leftrightarrow \forall x \in X. \quad r(a_1, x) = r(a_2, x).$$

Esta é evidentemente uma relação de equivalência: $\mathcal{A}$ é separável exatamente quando essa relação é a identidade.

Proposição 4.1. *Se $(f, g) : (A, r, X) \to (B, s, Y)$ é um morfismo em Chu, então f preserva a relação $\simeq$. Isto é, para todo $a_1, a_2 \in A$,*

$$a_1 \simeq a_2 \Rightarrow f(a_1) \simeq f(a_2).$$

Prova. Para qualquer $y \in Y$:

$$s(f(a_1), y) = r(a_1, g(y)) = r(a_2, g(y)) = s(f(a_2), y).$$

■

Definição 4.3. *Dois espaços de Chu são* ***equivalentes*** *quando seus respectivos colapsos biextensional são isomorfos.*

Definição 4.4. ***Continuidade:*** *Dados os espaços $\mathcal{A} = (A, r, X)$ e $\mathcal{B} = (B, s, Y)$, uma função $f : A \to B$ entre conjuntos, pode ser referida como uma função $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre espaços de Chu, onde uma função de $\mathcal{B}^\perp$ para $\mathcal{A}^\perp$ significa uma função de Y para X. Em suma, dizemos que uma função entre espaços de Chu $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é* ***contínua*** *quando se tem um adjunto de $\mathcal{B}^\perp$ para $\mathcal{A}^\perp$, isto é, quando existe uma função $g : Y \to X$ fazendo (f, g) um morfismo de Chu, $s(f(a), y) = r(a, g(y))$.*

4.2 Construções Básicas

Vamos agora definir uma série de operações em espaços de Chu. Operações estas que vêm de lógica linear (GIRARD, 1987), uma abordagem realizada pelo Lafont e Streicher (1991), que veremos mais adiante, e o processo de álgebra com interpretação sobre espaços de Chu (GUPTA, 1994).

- **Dual**: Definimos o dual $\mathcal{A}^\perp$ de $\mathcal{A} = (A, r, X)$ como $\mathcal{A}^\perp = (X, \breve{r}, A)$, onde $\breve{r}(x, a) = r(a, x)$. Observe evidentemente que quando $\mathcal{A}$ é separável (todas as linhas distintas), $\mathcal{A}^\perp$ é extensional (todas a colunas distintas). Da mesma forma quando $\mathcal{A}$ é extencional, $\mathcal{A}^\perp$ é separável. Assim, o dual preserva biextensionalidade.

A definição de $\mathcal{A}^\perp$ faz $\mathcal{A}^{\perp\perp}$ não apenas isomorfo a $\mathcal{A}$ mas igual a ele, dando-nos a nossa primeira lei:

$$\mathcal{A}^{\perp\perp} = \mathcal{A}.$$

De fato, para $\mathcal{A}^\perp = (X, \breve{r}, A)$, temos $\mathcal{A}^{\perp\perp} = (A, \tilde{r}, X)$, onde $\tilde{r}(x, a) = (\breve{r}(x, a))^\perp = \breve{r}(a, x) = r(x, a) \Rightarrow \tilde{r} = r$.

Exemplo 4.3. *Considere o espaço de Chu do exemplo 4.1 dado por*

	x_1 x_2 x_3 x_4
a_1	0 1 1 0
a_2	1 0 0 1
a_3	1 1 1 1
a_4	0 1 1 0
a_5	1 0 0 1

.

Assim, temos como o dual $\mathcal{A}^{\perp}$:

$$\begin{aligned} r(a_1, x_1) &= 0 = \breve{r}(x_1, a_1) \\ r(a_1, x_2) &= 1 = \breve{r}(x_2, a_1) \\ r(a_1, x_3) &= 1 = \breve{r}(x_3, a_1) \\ r(a_1, x_4) &= 0 = \breve{r}(x_4, a_1) \\ &\vdots \\ r(a_5, x_4) &= 1 = \breve{r}(x_4, a_5). \end{aligned}$$

01101
10110
10110
01101

Oberserve que como $\mathcal{A}$ *não é separárel, nem extensional e nem biextensional, assim temos que* $\mathcal{A}^{\perp}$ *também não o é.*

• **Tensor**: O produto tensorial $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ de $\mathcal{A} = (A, r, X)$ *e* $\mathcal{B} = (B, s, Y)$ é definido como $(A \times B, t, \mathcal{F})$ onde $\mathcal{F} \subset Y^A \times X^B$ é o conjunto de todos os pares (f, g) de funções $f : A \to Y$ *e* $g : B \to X$ para qual $s(b, f(a)) = r(a, g(b))$ para todo $a \in A$ e $b \in B$, e $t : (A \times B) \times \mathcal{F} \to K$ é dado por $t((a, b), (f, g)) = s(b, f(a))(= r(a, g(b)))$.

Quando $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são biextensionais, $\mathcal{F}$ pode ser entendido como todas as soluções para um jogo de palavras cruzadas $A \times B$ de tal forma que as palavras verticais são colunas de $\mathcal{A}$ e as palavras horizontais são linhas de $\mathcal{B}^{\perp}$ (colunas de $\mathcal{B}$). As colunas do produto $A \otimes B$ são as próprias soluções, com as linhas das soluções previstas uma extremidade à outra e os duais para formar uma única coluna.

Relacionado com o produto tensorial temos a unidade tensorial **1**, ou seja, o espaço de Chu $(*, r, K)$, que corresponde ao espaço com 1 ponto e $|K|$ estado, onde $r(*, k) = k$ para $k \in K$.

Quando $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são extensionais, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ é extensional por definição: duas funções distintas em $\mathcal{F}$ devem diferir em um determinado ponto (a, b). Ele não precisa, contudo, ser separável.

Exemplo 4.4. *Seja o espaço* $\mathcal{A} = (A, r, X) =$

	x_1 x_2
a_1	*0 0*
a_2	*0 1*

.

Vamos calcular $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$.

Observe que teremos um matriz com 4 linhas $A \times A$. *Para nossa* $\mathcal{F}$, *como estamos fazendo o produto entre o mesmo espaço temos que* $f : A \to X$ *e* $g : A \to X$, *ou seja, teremos cadeias de tamanho dois de um conjunto de dois elementos* (X). *Assim, todas as possibilidades de* f *são:* $\{x_1x_1, x_1x_2, x_2x_1, x_2x_2\}$, *onde o primeiro elemento de cada cadeia é o* $f(a_1)$ *e o segundo* $f(a_2)$. *O mesmo acontece para a* g.

Portanto, teremos quatro combinações possíveis de a *e* b *(*$a = b$ *para este nosso exemplo que temos* $A \times A$*) para verificar que* $s(b, f(a)) = r(a, g(b))$, *dadas* f *e* g *fixas, sabendo que são* 4×4 *possíveis pares* (f, g), *totalizando então* $4 \times 4 \times 4$ *testes.*

Vamos começar com a primeira string de f *com a primeira string de* g *(*$f = x_1x_1, g = x_1x_1$*):*

	$r(a, g(b))$	$s(b, f(a))$
a_1b_1	0	0
a_1b_2	0	0
a_2b_1	0	0
a_2b_2	0	0

Logo,para este caso, temos que todas satisfazem $s(b, f(a)) = r(a, g(b))$, *assim nossa primeira coluna será* 0000.

Prosseguindo agora com a primeira strig de f (x_1, x_1) *com a segunda strig de* g (x_1x_2) :

	$r(a, g(b))$	$s(b, f(a))$
a_1b_1	0	0
a_1b_2	0	0
a_2b_1	0	0
a_2b_2	0	1

Observe que para este caso a última combinação não satisfaz $s(b, f(a)) = r(a, g(b))$, *portanto o desconsideramos.*

Prosseguindo desta forma, obtemos os seguintes resultados, no qual geramos um programa para obtenção dos mesmos para maior agilidade:

{Verdadeiro, Verdadeiro, Falso, Verdadeiro}
{Verdadeiro, Verdadeiro, Falso, Falso}
{Verdadeiro, Verdadeiro, Verdadeiro, Falso}
{Verdadeiro, Verdadeiro, Verdadeiro, Verdadeiro}
{Verdadeiro, Verdadeiro, Falso, Falso}
{Verdadeiro, Verdadeiro, Falso, Verdadeiro}
{Verdadeiro, Falso, Verdadeiro, Verdadeiro}
{Verdadeiro, Falso, Verdadeiro, Falso}
{Verdadeiro, Falso, Falso, Verdadeiro}
{Verdadeiro, Falso, Falso, Falso}
{Verdadeiro, Falso, Verdadeiro, Falso}
{Verdadeiro, Falso, Verdadeiro, Verdadeiro}
{Verdadeiro, Falso, Falso, Falso}
{Verdadeiro, Falso, Falso, Verdadeiro}

Onde, verdadeiro indica que $s(b, f(a)) = r(a, g(b))$*, e falso para* $s(b, f(a)) \neq r(a, g(b))$*.*

Assim,

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} = \boxed{\begin{matrix} 00 \\ 00 \\ 00 \\ 01 \end{matrix}}$$

cujo colapso biextensional é $\boxed{\begin{matrix} 00 \\ 01 \end{matrix}}$.

Observação 4.1. *Em alguns casos o produto tensorial de dois espaços de Chu corresponde ao espaço de Chu vazio (0), ou seja, de todas as possíveis combinações nenhuma satisfaz* $s(b, f(a)) = r(a, g(b))$*, assim dizemos que o produto é* 0 *(o espaço de Chu vazio, não tendo pontos e contendo um estado). Um exemplo são os espaços* $\boxed{\begin{matrix} 00 \\ 01 \end{matrix}}$ *e* $\boxed{\begin{matrix} 01 \\ 10 \end{matrix}}$ *cujo produto é 0.*

• **Funtorialidade**: Definimos até agora o dual e o produto tensorial apenas para espaços de Chu. Vamos agora fazer essas operações em funtores em Chu_K estendendo seus respectivos domínios para incluir morfismos.

Dado $(f, g) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, seja $(f, g)^{\perp} : \mathcal{B}^{\perp} \to \mathcal{A}^{\perp}$ definido por (g, f). Podemos usar para este caso a notação $f^{\perp} = g$.

Dada as funções $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ e $g : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$, definimos $f \otimes g : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to \mathcal{A}' \otimes \mathcal{B}'$ sendo a função $(f \otimes g)(a, b) = (f(a), g(b))$. Quando f e g são contínuas, também é $f \otimes g$, de fato $(f \otimes g)^{\perp}$ de $\mathcal{G}$ para $\mathcal{F}$ (onde $\mathcal{G}$ e $\mathcal{F}$ consiste respectivamente dos pares $(h' : A' \to Y', k' : B' \to X')$ e $(h : A \to Y, k : B \to X)$) envia $h' : A' \to Y'$ para $g^{\perp} \circ h' \circ f : A \to Y$ e $k' : B' \to X'$ para $f_{\perp} \circ k' \circ g : B \to X$.

Proposição 4.2. *O tensor é comutativo e associativo, a menos de isomorfismos naturais:* $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \cong \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ *e* $\mathcal{A} \otimes (\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}) \cong (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \otimes \mathcal{C}$

Prova. A naturalidade desses isomorfismos segue imediatamente dos isomorfismos correspondentes em **Set**. Mostramos a sua continuidade separadamente para cada lei.

Comutatividade: o isomorfismo $(\gamma, \delta) : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ onde $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = (A \times B, t, \mathcal{F}), \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} = (B \times A, u, \mathcal{G}), \gamma : A \otimes B \to B \otimes A$ satisfaz $\gamma(a, b) = (b, a)$, e $\delta : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ satisfaz $\delta(g, f) = (f, g)$. Onde $t : (A \times B) \times \mathcal{F} \to K$ e $u : (B \times A) \times \mathcal{G} \to K$. A continuidade de (γ, δ) segue-se a partir de $u(\gamma(a, b), (g, f)) = u((b, a), (g, f)) = r(a, g(b)) = s(b, f(a)) = t((a, b), (f, g)) = t((a, b), \delta(g, f))$ para todo $(a, b) \in A \times B$ e $(g, f) \in \mathcal{G}$.

Associatividade: sejam $\mathcal{A} = (A, r, X), \quad \mathcal{B} = (B, s, Y) \quad e \quad \mathcal{C} = (C, t, Z)$. Observa-se que tanto $\mathcal{A} \otimes (\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}) \quad e \quad (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \otimes \mathcal{C}$ podem ser entendidos como $(A \times B \times C, n, \mathcal{M})$ onde $\mathcal{M}$ consiste de todas as funções $m : A \times B \times C \to K$ satisfazendo a conjunção de três condições:

1. para todo b, c existe x tal que para todo a, $\quad m(a, b, c) = r(a, x)$;
2. para todo c, a existe y tal que para todo b, $\quad m(a, b, c) = s(b, y)$;
3. para todo a, b existe z tal que para todo c, $\quad m(a, b, c) = t(c, z)$;

De fato, temos que $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = (A \times B, u, \mathcal{F})$, onde $\mathcal{F}$ é o conjunto de todos os pares (f', g') de funções $f' : A \to Y$ e $g' : B \to X$. Similarmente, temos que $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C} = (B \times C, v, \mathcal{G})$, onde $G := (f'', g'')$ com $f'' : B \to Z$ e $g'' : C \to Y$.

Dessa forma, $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \otimes \mathcal{C} = ((A \times B) \times C, k, \mathcal{H})$ onde $\mathcal{H} := (f, g)$ com $f : A \times B \to Z$ e $g : C \to \mathcal{F}$. Similarmente, $\mathcal{A} \otimes (\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}) = (A \times (B \times C), l, \mathcal{I})$ onde $\mathcal{I} := (h, i)$ com $h : A \to \mathcal{G}$ e $i : B \times C \to X$.

O isomorfismo $(\gamma, \sigma) : (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \otimes \mathcal{C} \to \mathcal{A} \otimes (\mathcal{B} \otimes \mathcal{C})$, $\gamma : (A \times B) \times C \to A \times (B \times C)$ satisfaz $\gamma((a, b), c) = (a, (b, c))$ com $\sigma : \mathcal{I} \to \mathcal{H}$. A continuidade de (γ, σ) segue-se a partir de:

- $k((a, b), c), (f.g)) = u((a, b), g(c)) = s(b, f'(g(c)(a))) = r(a, g'(g(c)(b))) = t(c, f(a, b))$.
- $l((a, (b, c), (h, i)) = r(a, i(b, c)) = v((b, c), h(a)) = t(c, f''(h(a)(b))) = s(b, g''(h(a)(c)))$.

para todo $a \in A, b \in B$ e $c \in C$.

$\blacksquare$

Proposição 4.3. *A unidade do tensor se comporta como tal, isto é* $\mathcal{A} \otimes 1 \cong \mathcal{A} \cong 1 \otimes \mathcal{A}$ *através do evidente emparelhamento do isomorfismo* $(a, *)$ *com* a.

Prova. Sejam os espaços $\mathcal{A} = (A, r, X)$ e $\mathbf{1} = (*, s, K)$. O produto $A \otimes \mathbf{1}$ é dado por $(A \times *, t, \mathcal{F})$, onde $\mathcal{F}$ é o conjunto de todos os pares (f, g), com $f : A \to K$ e $g : * \to X$ de modo que $s(*, f(a)) = f(a) = r(a, g(*))$, onde a f corresponde a respectivas linhas de $\mathcal{A}$ e g a uma letra da linha dada. Assim, o par (f, g) satisfaz uma coluna de $\mathcal{A}$ e daí $\mathcal{F}$ corresponde a todas colunas de $\mathcal{A}$ que é equivalente ao X. Assim,

$$\begin{aligned} t \; &: A \times \{*\} \times \mathcal{F} \to K \\ &: A \times X \to K \end{aligned}$$

$$\therefore \mathcal{A} \otimes \mathbf{1} \cong \mathcal{A}$$

Da mesma forma, podemos provar que $\mathbf{1} \otimes \mathcal{A} \cong \mathcal{A}$, além disso como sabemos que o tensor é comutativo $\mathcal{A} \otimes \mathbf{1} \cong \mathbf{1} \otimes \mathcal{A}$, o que implica que $\mathcal{A} \otimes \mathbf{1} \cong \mathcal{A} \cong \mathbf{1} \otimes \mathcal{A}$, como desejado. $\blacksquare$

Exemplo 4.5. *Um exemplo trivial em,* Chu_2, *do isomorfismo acima é dado pelo produto:*

$$A \otimes \mathbf{1} = \boxed{\begin{matrix} 00 \\ 01 \end{matrix}} \otimes \boxed{01} = \boxed{\begin{matrix} 00 \\ 01 \end{matrix}}$$

• **Implicação Linear**: Definimos uma implicação linear, ou seja $\mathcal{A} \multimap \mathcal{B}$, como sendo $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}^{\perp})^{\perp}$. Segue que $\mathcal{A} \multimap \mathcal{B} = (\mathcal{F}, t, A \times Y)$ onde $\mathcal{F}$ é o conjunto de todos os pares $(f, g), f : A \to B$ e $g : Y \to X$, satisfazendo a condição adjunta para um morfismo de Chu.

Exemplo 4.6. *Dado os espaços* $\mathcal{A} = \boxed{\begin{matrix} 0011 \\ 0101 \end{matrix}}$ *e* $\mathcal{B} = \boxed{\begin{matrix} 01 \\ 10 \end{matrix}}$, *temos:*

$$A \otimes B^{\perp} = \boxed{\begin{matrix} 0011 \\ 0101 \end{matrix}} \otimes \boxed{\begin{matrix} 01 \\ 10 \end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix} 0011 \\ 1100 \\ 0101 \\ 1010 \end{matrix}}$$

Assim, a implicação linear $A \multimap B = (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}^{\perp})^{\perp}$ *é dada por:* $\boxed{\begin{matrix} 0101 \\ 0110 \\ 1001 \\ 1010 \end{matrix}}$

Para espaços biextensionais o enigma da metáfora de palavras cruzadas se aplica. A função $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ pode então ser representada como uma matriz m, $A \times Y$ sobre K, ou seja $m(a, y) = s(f(a), y)$. Tomando a linha $s(f(a), -)$ como a representação em $\mathcal{B}$ de $f(a)$, esta representação de f é simplesmente uma listagem das representações em $\mathcal{B}$ dos valores de f nos pontos de A. Como mostra a simples ilustração:

$$\begin{array}{c|c} & \mathrm{X} \\ \hline \mathrm{A} & \\ & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} & \mathrm{Y} \\ \hline \mathrm{B} & \\ & \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c|c} & \mathrm{Y} \\ \hline \mathrm{A} & \\ & \end{array}$$

A função dual $g : \mathcal{B}^{\perp} \to \mathcal{A}^{\perp}$ pode ser representada como uma matriz $Y \times A$ sobre K, ou seja $m(y, a) = r(a, g(y))$. Para tais espaços temos então uma caracterização alternativa de continuidade: a função é contínua apenas quando o inverso (transposição) da sua representação é uma função de $\mathcal{B}^{\perp}$ para $\mathcal{A}^{\perp}$.

$$\begin{array}{c|c} & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{Y} & \\ & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} & \mathrm{A} \\ \hline \mathrm{X} & \\ & \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c|c} & \mathrm{A} \\ \hline \mathrm{Y} & \\ & \end{array}$$

Com um dual adicional a definição de implicação linear pode ser transformada em $\mathcal{A}\#\mathcal{B}$, ou seja, $\mathcal{A}\#\mathcal{B}$, é definida como $(\mathcal{A}^{\perp} \otimes \mathcal{B}^{\perp})^{\perp}$. e significa simplesmente o dual *De Morgan* de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

- $\mathcal{A}\#\mathcal{B}$ é produto direto ou categórico.

Exemplo 4.7. *Um exemplo simples, consideremos o espaço $\mathcal{A}$ como sendo* $\boxed{\begin{matrix} 01 \\ 10 \end{matrix}}$ *o produto categórico $\mathcal{A}\#\mathcal{A}$ corresponde a:*

$$\mathcal{A}^{\perp} \otimes \mathcal{B}^{\perp} = \boxed{\begin{matrix} 01 \\ 10 \end{matrix}} \otimes \boxed{\begin{matrix} 01 \\ 10 \end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix} 01 \\ 10 \end{matrix}}.$$

$$\mathcal{A}\#\mathcal{A} = (\mathcal{A}^{\perp} \otimes \mathcal{B}^{\perp})^{\perp} = \boxed{\begin{matrix} 01 \\ 10 \end{matrix}}.$$

Com argumentos biextensionais $\mathcal{A} \multimap \mathcal{B}$ e $\mathcal{A}\#\mathcal{B}$ são separáveis mas não necessariamente extensional, pela mesma razão $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ é extensional mas não necessariamente separável. Assim, para fazer $\mathcal{A} \multimap \mathcal{B}$ e $\mathcal{A}\#\mathcal{B}$ biextensionais, colunas iguais devem ser identificadas.

• **Aditivos (União disjunta)**: Os conectivos aditivos (da lógica linear) são a soma $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ e o seu dual $\mathcal{A}\&\mathcal{B}$, com respectivas unidades 0 e $\top$.

$\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ é definido como $(A+B, t, X \times Y)$ onde $A+B$ é a união disjunta de A e B tal que $t(a,(x,y)) = r(a,x)$ e $t(b,(x,y)) = s(b,y)$. Sua unidade 0 é o espaço vazio discreto que não tem ponto e possui apenas um estado. Para morfismos $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}', g : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ temos $f \oplus g : \mathcal{A} \oplus \mathcal{B} \to \mathcal{A}' \oplus \mathcal{B}'$ que leva $a \in \mathcal{A}$ para $f(a) \in \mathcal{A}'$ e $b \in \mathcal{B}$ para $g(b) \in \mathcal{B}'$. $\mathcal{A}\&\mathcal{B}$ como o *dual De Morgan* de $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ é definido para ambos os objetos e morfismos por, $\mathcal{A}\&\mathcal{B} = (\mathcal{A}^\perp \oplus \mathcal{B}^\perp)^\perp$, com $\top = 0^\perp$.

Exemplo 4.8. *Dados os espaços* $\mathcal{A} = \boxed{\begin{matrix} 0011 \\ 0101 \end{matrix}}$ *e* $\mathcal{B} = \boxed{01}$, *vamos calcular a soma adjunta* $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ *e o seu dual* $\mathcal{A}\&\mathcal{B}$:

- *Soma* $\oplus$: *Pela definição, sabemos que nosso espaço terá 3 linhas* $(A+B)$ *e 8 colunas* $(X \times Y)$, *do seguinte modo:*

$$\boxed{\begin{matrix} t(a_1,(x_1,y_1)) & t(a_1,(x_1,y_2)) & t(a_1,(x_2,y_1)) & ... & t(a_1,(x_4,y_2)) \\ t(a_2,(x_1,y_1)) & t(a_2,(x_1,y_2)) & t(a_2,(x_2,y_1)) & ... & t(a_2,(x_4,y_2)) \\ t(b_1,(x_1,y_1)) & t(b_1,(x_1,y_2)) & t(b_1,(x_2,y_1)) & ... & t(b_1,(x_4,y_2)) \end{matrix}}$$

onde $t(a,(x,y)) = r(a,x)$ *e* $t(b,(x,y)) = s(b,y)$. *Assim,*

$$\begin{array}{rcccl} t(a_1,(x_1,y_1)) & = & r(a_1,x_1) & = & 0; \\ t(a_1,(x_1,y_2)) & = & r(a_1,x_1) & = & 0; \\ t(a_1,(x_2,y_1)) & = & r(a_1,x_2) & = & 0; \\ & & ... & & \\ t(a_1,(x_4,y_2)) & = & r(a_1,x_4) & = & 1; \\ t(a_2,(x_1,y_1)) & = & r(a_2,x_1) & = & 0; \\ & & ... & & \\ t(a_2,(x_4,y_2)) & = & r(a_2,x_4) & = & 1; \\ t(b_1,(x_1,y_1)) & = & s(b_1,y_1) & = & 0; \\ & & ... & & \\ t(b_1,(x_4,y_2)) & = & r(a_1,x_1) & = & 1; \end{array}$$

Portanto,

$$A \oplus B = \boxed{\begin{array}{c} \mathit{0011} \\ \mathit{0101} \end{array}} \oplus \boxed{\mathit{01}} = \boxed{\begin{array}{c} \mathit{00001111} \\ \mathit{00110011} \\ \mathit{01010101} \end{array}}.$$

- *Para o dual $\mathcal{A}\&\mathcal{B}$: procedemos da mesma forma como a soma, mas agoras com os duais de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$:*

$$\mathcal{A}^{\perp} \oplus \mathcal{B}^{\perp} = \boxed{\begin{array}{c} \mathit{00} \\ \mathit{01} \\ \mathit{10} \\ \mathit{11} \end{array}} \oplus \boxed{\begin{array}{c} \mathit{0} \\ \mathit{1} \end{array}} = \boxed{\begin{array}{c} \mathit{00} \\ \mathit{01} \\ \mathit{10} \\ \mathit{11} \\ \mathit{00} \\ \mathit{11} \end{array}}.$$

Portanto,

$$\mathcal{A}\&\mathcal{B} = (\mathcal{A}^{\perp} \oplus \mathcal{B}^{\perp})^{\perp} = \boxed{\begin{array}{c} \mathit{001101} \\ \mathit{010101} \end{array}}.$$

cujo colapso biextensional é: $\boxed{\begin{array}{c} \mathit{0011} \\ \mathit{0101} \end{array}}$.

Proposição 4.4. *A soma $\oplus$ não é comutativa.*

Prova. De fato, tome como contra exemplo os espaços 10 e 01:

$$\boxed{10} \oplus \boxed{01} = \boxed{\begin{array}{c} 1100 \\ 0101 \end{array}} \neq \boxed{01} \oplus \boxed{10} = \boxed{\begin{array}{c} 0011 \\ 1010 \end{array}}.$$

■

• **Concatenação (ou composição sequencial)**: Esta operação assume que K é parcialmente ordenado, por exemplo $0 \leq 1$ para eventos de dois estados ou $0 \leq 1 \leq 2$ para eventos de três estados... Isto induz o usual ponto a ponto da ordenação parcial de K^A dado $f, g : A \to K, f \leq g$ apenas quando $f(a) \leq g(a)$ para todo $a \in A$, e similarmente para K^X. A intenção da ordem é injetar uma 'noção de tempo', decretando que um evento no estado $s \in K$ pode proceder para o estado s' se somente se $s \leq s'$.

A *concatenação*, denotada por $\mathcal{A};\mathcal{B}$, é o quociente de $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ obtido tomando apenas os estados (x, y) de $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ de tal modo que x seja um estado maximal (=final) de $\mathcal{A}$ ou y como um estado minimal (=inicial) de $\mathcal{B}$ sob as ordenações pontuais.

A concatenação é claramente não comutativa, mas é associativa, o comum condicionar em $((x, y), z)$ e $(x, (y, z))$.

Exemplo 4.9. *De um modo geral, usamos a operação ponto e vírgula como uma variante do* $\oplus$*, para criar estruturas ordenadas. Considere os seguintes espaços* $\mathcal{A} = \boxed{\begin{matrix} 01 \\ 10 \end{matrix}}$ *e* $1 = \boxed{01}$*, a concatenação* $\mathcal{A};\mathcal{B}$ *corresponde justamente a soma* $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$*, pois os estados* (x, y) *estão em ordenação (considerando* $0 \leq 1$*). Portanto,*

$$\mathcal{A} \oplus 1 = \boxed{\begin{matrix} 01 \\ 10 \end{matrix}} \oplus \boxed{01} = \boxed{\begin{matrix} 0011 \\ 1100 \\ 0101 \end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix} 01 \\ 10 \end{matrix}} ; \boxed{01} = \mathcal{A}; 1.$$

• **Escolha**: Esta operação, assume que K contém um elemento distinto 0 correspondendo a não ocorrência. A *escolha*, denotada por $A \sqcup B$, é definida como $(A+B, t, X+Y)$ onde $t(a, x) = r(a, x), t(b, y) = s(b, y)$, e $t(a, y) = t(b, x) = 0$. Assim, se $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ encontra-se em um estado de $\mathcal{A}$, nenhum dos eventos de $\mathcal{B}$ pode ter ocorrido nesse estado, e vice-versa para os estados de $\mathcal{B}$.

Exemplo 4.10. *Vamos calcular a escolha*

$$\boxed{\begin{matrix} 01 \\ 10 \end{matrix}} \sqcup \boxed{\begin{matrix} 00 \\ 01 \end{matrix}}$$

Pela definição, devemos obter um espaço da seguinte forma:

$$\boxed{\begin{matrix} t(a_1, x_1) & t(a_1, x_2) & t(a_1, y_1) & t(a_1, y_2) \\ t(a_2, x_1) & t(a_2, x_2) & t(a_2, y_1) & t(a_2, y_2) \\ t(b_1, x_1) & t(b_1, x_2) & t(b_1, y_1) & t(b_1, y_2) \\ t(b_2, x_1) & t(b_2, x_2) & t(b_2, y_1) & t(b_2, y_2) \end{matrix}}$$

sabendo que $t(a, x) = r(a, x), t(b, y) = s(b, y)$*, e* $t(a, y) = t(b, x) = 0$*, nosso espaço escolha* $\sqcup$ *é determinado por:*

$$t(a_1, x_1) = t(a_1, y_1) = t(a_1, y_2) = t(a_2, x_2) = t(a_2, y_1) = t(a_2, y_2) =$$
$$t(b_1, x_1) = t(b_1, x_2) = t(b_1, y_1) = t(b_1, y_2) = t(b_2, x_1) = t(b_2, x_2) =$$
$$t(b_2, y_1) = 0.$$

E

$$t(a_1, x_2) = (a_2, x_1) = t(b_2, y_2).$$

Logo,

$$\boxed{\begin{matrix} 01 \\ 10 \end{matrix}} \sqcup \boxed{\begin{matrix} 00 \\ 01 \end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix} 0100 \\ 1000 \\ 0000 \\ 0001 \end{matrix}}$$

5 Outra visão do espaço de Chu - Álgebra Linear

Neste capítulo vamos abordar o Espaço de Chu como um *'novo olhar sobre Álgebra linear'*. Essa abordagem nos ajudará mais adiante quando formos tratar das estrutura categóricas em Chu_K.

O Lafont e Streicher (1991) estudaram a categoria de Chu usando matrizes sobre K (com K corpo) de modo que a relação r de um espaço de Chu (A, r, X) é visto como o produto interno em espaços vetoriais e o conjunto X são funções lineares de A para K. Algumas definições e exemplos que veremos neste capítulo foram retirados deste artigo (LAFONT; STREICHER, 1991).

Iniciaremos este capítulo com um breve conceito de corpos, em seguida uma noção geral de mapas lineares e algumas construções básicas. Finalizaremos com a conexão de espaço de Chu com Algebra Linear.

5.1 Corpo

Em algébra, um *anel* é uma estrutura algébrica que consiste num conjunto, juntamente com duas operações binárias (normalmente chamado de adição e multiplicação). Através disto, teoremas de aritmética são estendidos para objetos não-numéricos como polinômios, séries, matrizes e funções. De maneira formal:

Definição 5.1. *Um anel R consiste de um conjunto com duas operações, $+$ e $\cdot$, satisfazendo:*

- *$(R, +)$ é um grupo abeliano;*
- *R é fechado sobre a multiplicação, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ para todo $a, b, c \in R$;*
- *$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, para todo $a, b, c \in R$.*

Exemplo 5.1. *$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ e $Mat_n(\mathbb{R}) = \{n \times n-$ matrizes com entradas reais$\}$ são anéis.*

Definição 5.2. *Um anel R é comutativo se $a \cdot b = b \cdot a$ para todo $a, b \in R$.*

Definição 5.3. *um corpo F é um anel comutativo com unidade em que todo elemento diferente de 0 possui um elemento inverso com relação à multiplicação.*

Exemplo 5.2. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$;

Exemplo 5.3. $\mathbb{Z}_2$, *o menor corpo, formado pelos números 0 e 1, em que 1 + 1 = 0. Este conjunto com as operações de adição e multiplicação satisfaz todos os axiomas de anel, é comutativo e tem unidade. Além disso, como em qualquer anel com unidade, 1 é o elemento inverso de 1.*

5.2 Algébra Linear - Mapas lineares

Seja X um espaço vetorial sobre um corpo K, a estimação (braket) $x, f \mapsto \langle x|f\rangle = f(x)$ corresponde a um mapa (bilinear) de $X \times X^*$ para K (com X^* o dual de X).

Veremos que as noções básicas de álgebra linear são definíveis em termos deste mapa, sem se referir à estrutura de K como um corpo, onde X é visto como um espaço vetorial sobre K.

Considere dois espaços vetoriais X, Y sobre K, então dado um mapa $u : X \to Y$ definimos a transposta de u como $u^* : Y^* \to X^*$ tal que

$$\langle u(x)|g\rangle = \langle x|u^*(g)\rangle$$

para todo $x \in X$ e $g \in Y^*$.

Por outro lado, se u e u^* são quaisquer (a priori não lineares) mapas que satisfazem essa equação, então u é linear e assim, u^* é sua transposta.

De fato, se escolhemos uma base $(y_i)_{i\in I}$ de Y, obtemos formas lineares y^{*i} tais que

$$u(x) = \sum_{i\in I}\langle u(x)|y^{*i}\rangle y_i = \sum_{i\in I}\langle x|u^*(y^{*i})\rangle y_i$$

Assim,

$$\begin{array}{rcl} u(x_1 + kx_2) & = & \sum_{i\in I}\langle u(x_1 + kx_2)|y^{*i}\rangle y_i \\ & = & \sum_{i\in I}\langle (x_1 + kx_2)|u^*(y^{*i}\rangle y_i \\ & = & \sum_{i\in I}\langle x_1|u^*(y^{*i}\rangle y_i + k\sum_{i\in I}\langle x_2|u^*(y^{*i}\rangle y_i \\ & = & \sum_{i\in I}\langle u(x_1)|y^{*i}\rangle + k\sum_{i\in I}\langle u(x_2)|y^{*i}\rangle \\ & = & u(x_1) + ku(x_2). \end{array}$$

para todo $x, x_1, x_2 \in X, k \in K$ o que demonstra a linearidade de u.

5.2.1 Formas multilineares

Uma forma bilinear $\varphi : X \times X \to K$ é definida como sendo dois mapas $\varphi_1 : Y \to X^*$ e $\varphi_2 : X \to Y^*$ como os componentes de φ, tais que

$$\langle x|\varphi_1(y)\rangle = \langle y|\varphi_2(x)\rangle = \varphi(x, y)$$

para todo $x \in X$ e $y \in Y$.

Em contrapartida, vamos assumir que $\varphi : X \times X \to K$, $\varphi_1 : Y \to X^*$ e $\varphi_2 : X \to Y^*$ são quaisquer mapas que satisfazem essas equações. Então φ é bilinear e φ_1 e φ_2 são suas componentes. De fato, a equação $\varphi(x, y) = \langle x|\varphi_1(y)\rangle$ expressa que φ é linear no seu primeiro argumento, e $\varphi(x, y) = \langle y|\varphi_2(x)\rangle$ que φ é linear no segundo argumento.

A forma multilinear $\varphi : X_1 \times ... \times X_n \to K$ define de forma mais geral de uma sequencia de mapas

$$\varphi_i : X_1 \times ... \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times ... \times X_n \to K$$

para todo $i = 1, 2, ..., n$ tal que

$$\langle x_1|\varphi_1(x_2, ..., x_n)\rangle = \langle x_2|\varphi_2(x_1, ..., x_n)\rangle = ... = \langle x_n|\varphi_n(x_1, ..., x_{n-1})\rangle = \varphi(x_1, ..., x_n)$$

para todo $x_i \in X_i$ e isso é suficiente para recuperar a multilinearidade de φ.

Notação: Denotamos $\mathcal{L}_n^*(X_1, ..., X_n)$ para o conjunto de formas multilinear sobre $X_1, ..., X_n$.

5.2.2 Mapas multilineares

Considere o mapa multilinear $u : X_1 \times ... \times X_n \to Y$, definimos $u^* : Y^* \to \mathcal{L}_n^*(X_1, ..., X_n)$ por

$$\langle u(x_1, ..., x_n)|g\rangle = u^*(x_1, ..., x_n)$$

para todo $x_i \in X_i$ e $g \in Y^*$. Novamente, isto é suficiente para recuperar a multilinearidade de u (usando uma base de Y).

5.2.3 Construções básicas em álgebra linear

Usando as noções básicas de mapas lineares e multilineares, é possível construir novos espaços vetoriais que são caracterizadas por propriedades universais.

Notação: Denotamos $\mathcal{L}(X, Y)$ para o conjunto de mapas lineares de X para Y, e $\mathcal{L}_2(X, Y; Z)$ para o conjunto de mapas bilineares de $X \times Y$ para Z.

Produto tensorial

Definição 5.4. *Sejam X e Y espaços vetoriais sobre o corpo K. O produto tensorial de X e Y, denotado por $X \otimes Y$ é um par (Z, φ), onde Z é um espaço vetorial sobre o corpo K, e $\varphi : X \times Y \to Z$ é uma aplicação bilinear que satisfaz a seguinte propriedade universal: Para todo espaço vetorial Z sobre K e para toda $\psi : X \times Y \to Z'$ bilinear, existe uma única $T : Z \to Z'$ linear tal que*

$$\psi(x, y) = T(\varphi(x, y)), \forall x \in X \quad e \quad \forall y \in Y.$$

O produto tensorial $X \otimes Y$ permite substituir bilinearidade por linearidade. Caracteriza-se pelo isomorfismo natural:

$$\mathcal{L}(X \otimes Y, Z) \cong \mathcal{L}_2(X, Y; Z)$$

Prova. Este isomorfiso é construido a partir da definição de produto tensorial. Dado um mapa linear $A : X \otimes Y \to Z$, a composição $A \circ \otimes : X \times Y \to Z$ é bilinear. Por outro lado, dado um mapa bilinear $B : X \times Y \to Z$, existe um único mapa $\bar{B} : X \otimes Y \to Z$ tal que:

$$(\bar{B} \circ \otimes)(x, y) = B(x, y)$$

para todod $x, y \in X \times Y$.

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "B"'] & X \otimes Y \arrow[d, "\bar{B}"] \\
& Z
\end{tikzcd}$$

Assim, os mapas:

- $\mathcal{L}(X \otimes Y, Z) \ni A \mapsto A \circ \otimes \in \mathcal{L}_2(X, Y; Z)$.
  $(A \bar{\circ} \otimes)(X \otimes Y) = A \circ \otimes(X, Y) = A(X \otimes Y)$.

- $\mathcal{L}_2(X, Y; Z) \ni B \mapsto \bar{B} \in \mathcal{L}(X \otimes Y, Z)$
  $\bar{B} \circ \otimes(X, Y) = B(X, Y)$.

são inversos. Logo, $\mathcal{L}(X \otimes Y, Z) \cong \mathcal{L}_2(X, Y; Z)$. ∎

O espaço vetorial próprio K, é caracterizado por

$$\mathcal{L}(K, Z) \cong Z$$

no qual é a unidade de $\otimes$.

Teorema 5.1. *Se X e Y tem dimensão finita então $K^* \cong K$ e $(X \otimes Y)^* \cong X^* \otimes Y^*$*

Prova. De fato, defina o mapa $\phi : X^* \times Y^* \to (X \otimes Y)^*$ por

$$(f, g) \mapsto (x \otimes y \mapsto f(x)g(y))$$

para todo $f \in X^*, g \in Y^*$. Seja $f_1, f_2 \in X^*$, $g_1, g_2 \in Y^*$ e $a, b \in K$. Então:

$$\begin{aligned}
\phi(af_1 + bf_2, g) &= (x \otimes y \mapsto (af_1 + bf_2)(x)g_1(y)) \\
&= x \otimes y \mapsto (af_1(x) + bf_2(x))g_1(y) \\
&= x \otimes y \mapsto (af_1(x)g_1(y) + bf_2(x)g_1(y)) \\
&= a(x \otimes y \mapsto (f_1(x)g_1(y)) + b(x \otimes y \mapsto f_2(x)g_1(y)) \\
&= a\phi(f_1, g_1) + b\phi(f_2, g_2)
\end{aligned}$$

de modo análogo, temos que:

$$\phi(f_1, ag_1 + bg_2) = a\phi(f_1, g_1) + b\phi(f_2, g_2)$$

Assim, ϕ é bilinear. Portanto pela propriedade universal do produto tensorial (isomorfismo visto no produto tensorial em 5.2.3), ϕ induz um único mapa linear $\varphi : X^* \otimes Y^* \to (X \otimes Y)^*$. Para mostrar que φ é um isomorfismo, é suficiente mostrar que φ é injetiva, desde que $X^* \otimes Y^*$ e $(X \otimes Y)^*$ têm a mesma dimensão ($dimX.dimY$ (ambos finita)).

Suponha $f \in X^*$ e $g \in Y^*$ tal que $\varphi(f \otimes g) = 0$. Temos que $0 = \varphi(f \otimes g) = (x \otimes y \mapsto f(x)g(y))$, suponha $f \neq 0$, então $f(x_0) \neq 0$, para algum $x_0 \in X$. Assim, uma vez que $\varphi(x_0 \otimes y) = f(x_0)g(y) = 0$ para todo $y \in Y$, temos $g(y) = 0$. Similarmente, se $g \neq 0$ então $f = 0$. Logo, se $f \otimes g \in Ker\varphi$

$$f \otimes g = f \otimes 0 = 0 \otimes g = 0.$$

Portanto, $ker\varphi = 0$ e φ é injetiva. Logo, é isomorfismo. ■

De um modo geral, temos $X \otimes Y$ de várias maneiras:

1. como o conjunto formal de pares $x \otimes y$.

2. como o espaço vetorial com bases $(x_i \otimes y_i)_{(i,j) \in I \times J}$onde $(x_i)_{i \in I}$ é uma base de X e $(y_j)_{j \in J}$ é uma base de Y.

3. como o espaço vetorial dual de formas bilineares sobre $X \times Y$ para o caso finito.

Hom-sets Internos :

Teorema 5.2. *Sejam Y, Y e Z de dimensão finita então*

$$\mathcal{L}(X \otimes Y, Z) \cong \mathcal{L}_2(X, Y; Z) \cong \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(Y, Z))$$

onde $\mathcal{L}(Y, Z)$ está equipado com a sua estrutura de espaço vetorial.

Prova. O isomorfismo $\mathcal{L}(X \otimes Y, Z) \cong \mathcal{L}_2(X, Y; Z)$ foi visto no produto tensorial em 5.2.3. Vamos provar que $\mathcal{L}(X \otimes Y, Z) \cong \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(Y, Z))$. Seja $\pi : X \times Y \to X \otimes Y$ uma projeção e suponha $f \in \mathcal{L}(X \otimes Y, Z)$. Então $f \circ \pi : X \times Y \to Z$ é bilinear. Defina $\varphi : \mathcal{L}(X \otimes Y, Z) \to \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(Y, Z))$ por

$$f \mapsto (x \mapsto (y \mapsto f \circ \pi(x, y))).$$

Então, uma vez que $f \circ \pi$ é bilinear, temos que $y \mapsto f \circ \pi(x, y)$ é linear. Seja $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(X \otimes Y, Z)$ e $a, b \in K$, temos:

$$\begin{aligned}
\varphi(af_1 + bf_2) &= x \mapsto (y \mapsto (af_1 + bf_2) \circ \pi(x, y)) \\
&= x \mapsto ((y \mapsto (af_1 \circ \pi(x, y)) + (y \mapsto bf_2 \circ \pi(x, y))) \\
&= (x \mapsto a(y \mapsto f_1 \circ \pi(x, y))) + (x \mapsto b(y \mapsto f_2 \circ \pi(x, y))) \\
&= a\varphi(f_1) + b\varphi(f_2)
\end{aligned}$$

Assim, φ é um homomorfismo. Uma vez que as dimensões de $\mathcal{L}(X \otimes Y, Z)$ e $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(Y, Z))$ são iguais (o produto de X, Y e Z), precisamos mostrar apenas que φ é injetora. Suponha $\varphi(f) = 0$ para $f \in \mathcal{L}(X \otimes Y, Z)$. Então,

$$0 = \varphi(f) = (x \mapsto (y \mapsto f \circ \pi(x, y)).$$

Logo, $f \circ \pi(x, y) = 0$ para todo $x \in X$ e $y \in Y$, assim $f = 0$. O que é verdade pois π é sobrejetivo. Portanto, $Ker\varphi = 0$. e φ é isomorfismo. ■

Teorema 5.3. *No caso finito, temos o seguinte isomorfismo:*

$$\mathcal{L}(X, Y) \cong X^* \otimes Y \cong (X \otimes Y^*)^*.$$

Prova. O isomorfismo $X^* \otimes Y \cong (X \otimes Y^*)^*$ é decorrente de 5.2.3. Vamos mosrar que $\mathcal{L}(X, Y) \cong X^* \otimes Y$. Defina o mapa $\phi : X^* \times Y \to \mathcal{L}(X, Y)$ por:

$$(a, y) \mapsto (x \mapsto a(x)y)$$

Seja $x \in X^*$, $y \in Y$ e $a, b \in Z$, portanto

1. $\phi((a + kb)(x_1), y) = (a + kb)(x)y = a(x)y + kb(x)y = \phi(a, y) + k\phi(b, y)$

Assim, ϕ é bilinear. Pela propriedade do produto tensorial, ϕ induz um único mapa linear $\varphi : X^* \otimes Y \to \mathcal{L}(X, Y)$. Como $X^* \otimes Y$ e $\mathcal{L}(X, Y)$ possuem dimensões iguais (dimX . dim Y), basta mostrar que φ é injetiva. Suponha $\varphi(f \otimes y) = 0$, $f \in X^*$ e $g \in Y$. Então,

$$0 = \varphi(f \otimes g) = (x \mapsto f(x)y),$$

ou seja, $f(x)y = 0$, para todo $x \in X$ com $y \in Y$. Isso ocorre se $f = 0$ ou $y = 0$. Como

$$f \otimes y = f \otimes 0 = 0 \otimes y = 0.$$

Então $Ker\varphi = 0$.

$\therefore \varphi$ é isomorfismo. ■

5.3 Chu_K - Álgebra linear

Agora vamos re-examinar as noções básicas de álgebra linear em um contexto mais abstrato. Para efeito, fixamos um conjunto K (sem estrutura) cujos elementos são chamados de escalares.

Definimos um espaço de Chu sobre K como sendo o par de conjuntos X_*, X^* equipado com um mapa $x, f \mapsto \langle x|f \rangle$ de $X_* \times X^*$ para K. Os elementos de X_* são chamados de vetores e os de X^* chamamos de formas de X.

Observação 5.1. *Devido a notação usada no contexto inicial deste capítulo e a visão para álgebra linear, continuaremos com a mesma até o fim deste. Por outro lado, caso ache mais interessante a notação usada no capítulo 4, consideramos os conjuntos* $X_* = A, X^* = X$ *e a função* r *como o mapeamento (braket)* $\langle x|f \rangle$ *onde* (A, r, X) *é o espaço de Chu normal* ($\mathcal{A} = (A, X)$, *como vimos no capítulo 4).*

5.3.1 Noções básicas

Vamos estender as construções básicas de álgebra linear que vimos na seção 5.2 para Chu.

Definição 5.5. *Um mapa linear* u *de* X *para* Y *consiste de dois mapas* $u_* : X_* \to Y_*$ *e* $u^* : Y^* \to X^*$ *satisfazendo:*

$$\langle u_*(x)|g \rangle = \langle x|u^*(g) \rangle$$

para todo $x \in X^*$ *e* $g \in Y^*$.

Escrevemos $\mathcal{L}(X, Y)$ para o conjunto de mapas lineares de X para Y.

A forma multilinear φ sobre $X_1 \times ... \times X_n$ é definida por uma sequencia de mapas:

$$\varphi_i : X_{1*} \times ... \times X_{i-1*} \times X_{i+1*} \times ... \times X_{n*} \to X_i^*$$

para todo $i = 1, 2, ..., n$ e $\bar{\varphi} : X_{1*} \times ... \times X_{n*}$ tais que:

$$\langle x_1 | \varphi_1(x_2, ..., x_n) \rangle = \langle x_2 | \varphi_2(x_1, ..., x_n) \rangle = ... = \langle x_n | \varphi_n(x_1, ..., x_{n-1}) \rangle = \bar{\varphi}(x_1, ..., x_n)$$

para todo $x_i \in X_{i*}$.

Notação: Denotamos $\mathcal{L}_n^*(X_1, ..., X_n)$ para o conjunto de formas multilinear sobre $X_1, ..., X_n$.

Definição 5.6. *Um mapa multilinear $u : X_1 \times ... \times X_n \to Y$, consiste de dois mapas $u_* : X_{1*} \times ... \times X_{n*} \to Y$ e $u^* : Y^* \to \mathcal{L}_n^*(X_1, ..., X_n)$ satisfazendo*

$$\langle u_*(x_1, ..., x_n) | g \rangle = \overline{u^*(g)}(x_1, ..., x_n)$$

para todo $x_i \in X_i$ e $g \in Y^*$.

Escrevemos $\mathcal{L}_n(X_1, ..., X_n; Y)$ para os conjuntos de mapas multilineares de $X_1, ..., X_n$ para Y.

Definição 5.7. *Um 'multivetor' ξ sobre $X_1, ..., X_n$ é a noção dual de formas multilineares, no qual é dado por mapas:*

$$\xi_i : X_1^* \times ... \times X_{i-1}^* \times X_{i+1}^* \times ... \times X_n^* \to X_i$$

para todo $i = 1, ..., n$ e $\bar{\xi} : X_1^* \times ... \times X_n^* \to K$ tal que

$$\langle \xi_1(f_2, ..., f_n) | f_1 \rangle = \langle \xi_2(f_1, f_3, ..., f_n) | f_2 \rangle = ... = \langle \xi_n(f_1, ..., f_{n-1}) | f_n \rangle = \bar{\xi}(f_1, ..., f_n).$$

para todo $f_i \in X_1^*$.

Notação: Denotamos $\mathcal{L}_{*n}(X_1, ..., X_n)$ para o conjunto de multivetores sobre $X_1, ..., X_n$.

É claro que estes espaços de Chu sobre K formam uma categoria Chu_K com mapas lineares como morfismos: Se $u : X \to Y$ e $v : Y \to Z$ são mapas lineares, $v \circ u : X \to Z$ é dado por:

$$(v \circ u)_* = v_* \circ u_* : X_* \to Z_*,$$

$$(v \circ u)^* = u^* \circ v^* : Z^* \to X^*.$$

5.3.2 Exemplos

1. *Espaços vetoriais* - Se K é um corpo, $Vect_K$ é uma subcategoria 'full' de Chu_K (pela condição de mapas lineares que vimos na seção 5.2). De fato, devemos dizer que $Vect_K$ é uma submulticategoria 'full', uma vez que a noção de mapa multilinear também é preservada por essa inclusão.

2. Um espaço de Chu sobre $\mathbf{B} = \{verdeiro, falso\}$ é um par de cojuntos X_*, X^* equipado com a relação $\langle x|f\rangle$ satisfazendo a equação $\langle u_*(x)|g\rangle = \langle x|u^*(g)\rangle$, que se torna:
$$\langle u_*(x)|g\rangle \Longleftrightarrow \langle x|u^*(g)\rangle$$
Um espaço topologico define um espaço de Chu sobre $\mathbf{B}$ ou $\mathbb{Z}_2$: vetores são os pontos, as formas são subconjuntos abertos e $\langle x|U\rangle$, $x \in U$. Um morfismo
$$u : X \to Y$$
cujo mapeamento:
   - pontos de $X \to$ pontos de Y;
   - subconjuntos abertos de $Y \to$ subconjuntos abertos de X.

   Pela equação $\langle u_*(x)|g\rangle = \langle x|u^*(g)\rangle$, temos que o mapeamento é contínuo.

5.3.3 Construções em Chu

Dual : Definimos o dual X^{op} de um espaço de chu X, (seguindo esta linha de notação) como:
$$(X^{op})_* = X^*, \quad (X^{op})^* = X_*, \quad \langle f|x\rangle_{X^{op}} = \langle x|f\rangle_X.$$
Isto dá um funtor contravariante involutivo, (que veremos na definição de categoria monoidal dagger, mais adiante) de modo que a categoria Chu_K é auto-dual.

Observação 5.2. *Essa noção de dual (op) corresponde a definição de dual, vista no seção 4.2.*

Soma direta : A soma direta $X \oplus Y$ é dada por:
$$(X \oplus Y)_* = X_* + Y_*, \quad (X \oplus Y)^* = X^* \times Y^*,$$
$$\langle (a,x)|(f,g)\rangle_{X\oplus Y} = \langle x|f\rangle_X$$
$$\langle (b,y)|(f,g)\rangle_{X\oplus Y} = \langle y|g\rangle_X.$$

Produto tensorial : Pela definição, vemos que a partir de um mapa bilinear de X, Y para Z nada mais é que um mapa linear de $X \otimes Y$ para Z, onde $X \otimes Y$ é dado por:

$$(X \otimes Y)_* = X_* \times Y_*, \quad (X \otimes Y)^* = \mathcal{L}_2^*(X, Y),$$

$$\langle (x, y) | \varphi \rangle_{X \otimes Y} = \bar{\varphi}(x, y).$$

No capítulo 8 veremos que Chu_K é uma categoria simétrica monoidal com a unidade tensorial $\mathbf{1}$, definido por:

$$\mathbf{1}_* = \mathbf{1} = \{(\star)\}, \quad \mathbf{1}^* = K, \quad \langle \star | k \rangle_{\mathbf{1}} = k.$$

Fazendo a analogia com o Espaço de Chu via Álgebra Linear com o Espaço de Chu visto cápitulo 4, temos que:

$$\begin{array}{lrccc} 1. & (X, X^*, \langle \_ | \_ \rangle): & X & X^* & \langle \_ | \_ \rangle \\ 2. & (A, r, X): & A & X & r \end{array}$$

Ou seja, ao olharmos para o espaço (A, r, X) como um espaço extencional com $X \subseteq K$, isto é, (A, r, X) é um espaço *normal* onde r entendido como a aplicação $r(a, x) = \langle a | x \rangle = x(a)$ que cada $x \in X$ é uma função $x : A \to K$ com K corpo, corresponde justamente ao espaço de Chu dado no item 1, que vimos neste capítulo.

Até então, estávamos trabalhando com espaço de Chu como Chu_K com K= 2, ou seja, $Chu_2(A, X)$. Agora temos outra visão que faz a conexão de Chu com Álgebra Linear. Em suma, dados:

- $H = \{f | f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2\} = \{\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle | \alpha.\beta \in \mathbb{C}\}$ e
- $H^* = \{f' | f' : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}\} = \{\alpha\langle 0| + \beta\langle 1| | \alpha.\beta \in \mathbb{C}\}$

corresponde a $Chu_{\mathbb{C}}(H, H^*)$ satisfazendo todas as propriedades de produto, tranposta e hom-sets vistos.

Assim, observa-se que a categoria de espaços vetoriais sobre qualquer corpo K é realizável em Chu_K.

6 Construindo estrutura com categorias abstratas

Podemos visualizar a teoria das categorias numa ampla gama de lugares. Podemos ver exemplos delas assim como vemos em processos naturais e físicos ou em estruturas matemáticas ou até mesmo pode ser estudada como uma parte da matemática em seu próprio direito. Com isso, vamos dividi-la em três tipos diferentes:

1. **Categorias mundo real**: Estas categorias são processos que utilizamos no cotidiano, por exemplo processos em Física, Química ou Mecânica Quântica. Nossos estados físicos, químicos ou quânticos se tornam objetos e os processos do nosso sistema de um estado para outro são os morfismos. Nessas categorias a identidade é o mesmo que 'não fazer nada' e a composta $f \circ g$ corresponde a fazer o processo g seguido de processo f. Podemos nos restringir a exemplos científicos usando teoria das categorias a olhar para o processo de escrever uma dissertação ou uma lavagem de carro.

2. **Categorias Concretas**: Aqui os nossos objetos são estruturas matemáticas e os morfismos são estruturas que preservam o mapeamento entre elas; estas serão muitas vezes as estruturas usadas para modelar os processos do mundo real. Vimos modelos destas estruturas no capítulo 3, tais como: **Pos**, **Grp**, $Vect_K$.

3. **Categorias Abstratas**: Aqui categorias são estudadas como estruturas matemáticas em seu próprio direito. Ao definir propriedades nessas categorias, podemos construir uma estrutura que pode ser usada para modelar ou simular um sistema físico. Podemos também pensar nessas categorias como forma de axiomatização do nosso sistema. O estudo dessas categorias podem revelar informações muitas vezes interessante e incomum sobre o nosso sistema. A categoria monoidal estrita é um exemplo de uma categoria abstrata, ela fornece a estrutura básica para a maioria das categorias que vemos em computação quântica.

Em matemática, uma *categoria monoidal* (ou categoria tensorial) é uma categoria $\mathbf{C}$ equipada com um bifuntor

$$\otimes : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$$

Definição 6.1. *Uma* Categoria Monoidal Estrita *é uma categoria para a qual:*

- *objetos possuem estrutura de monóide* $(\boldsymbol{C}, \otimes, I)$ *i.e, para todo* $A, B, C \in \boldsymbol{C}$*,*

$$A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C \quad e \quad I \otimes A = A = A \otimes I\,,$$

- *para todos os objeto* $A, B, C, D \in \boldsymbol{C}$ *existe uma operação*

$$- \otimes - : \boldsymbol{C}(A, B) \times \boldsymbol{C}(C, D) \to \boldsymbol{C}(A \otimes C, B \otimes D) :: (f, g) \mapsto f \otimes g$$

que é associativo e possui 1_I *como unidade, isto é,*

$$f \otimes (g \otimes h) = (f \otimes g) \otimes h \quad e \quad 1_I \otimes f = f = f \otimes 1_I\,,$$

- *para todos os morfismos* f, g, h, k *com tipos correspondentes, temos*

$$(g \circ f) \otimes (k \circ h) = (g \otimes k) \circ (f \otimes h)\,, \tag{6.1}$$

- *para todos os objectos* $A, B \in \boldsymbol{C}$ *temos*

$$1_A \otimes 1_B = 1_{A \otimes B}\,. \tag{6.2}$$

Exemplo 6.1. *Um monóide* $(M, \bullet, 1)$ *também pode ser considerado como uma categoria monoidal estrita na qual todos morfismos são identidades.*
De fato, tomando M *como objetos,* $\bullet$ *sendo o produto tensorial e* 1 *como sendo a unidade para o tensor. Ao tomar as identidades como sendo os únicos morfismos, podemos equipar estes com a mesma estrutura monoidal como a estrutura de monóide nos objetos. Por isso, satisfaz a equação:*

$$(1_A \circ 1_A) \otimes (1_B \circ 1_B) = 1_A \otimes 1_B = 1_{A \otimes B} =$$
$$1_{A \otimes B} \circ 1_{A \otimes B} = (1_A \otimes 1_B) \circ (1_A \otimes 1_B)$$

Embora esta seja a estrutura básica para as categorias do mundo real que encontramos na Mecânica Quântica, as estruturas matemáticas utilizadas para representar estes sistemas não admitem as propriedades necessárias. O rigor das igualdades é onde a conexão falha. Nas categorias concretas de grupos, espaços topológicos, espaços vetoriais, espaços de Hilbert e espaços de Chu não temos

$$A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C \quad e \quad I \otimes A = A = A \otimes I.$$

Contudo, temos em vez de uma igualdade, os isomorfismos:

$$A \otimes (B \otimes C) \simeq (A \otimes B) \otimes C \quad e \quad I \otimes A \simeq A \simeq A \otimes I$$

Estes são, de fato, isomorfismos naturais. Isomorfismos naturais são transformações naturais que são também isomorfismos. Introduzimos as transformações naturais α (associatividade) para alternar os parênteses, λ e ρ (unidades à esquerda e à direita) correspondem ao processo de introdução de um novo objeto em relação a um já existente. Mais tarde, também iremos encontrar o isomorfismo natural de simetria σ o qual é usado para comutar os objetos em todo o produto monoidal.

Estes isomorfismos naturais nos permitem definir as categorias abstratas necessárias para modelar nossas categorias concretas (assim como as categorias do mundo real).

Definição 6.2. *Uma **categoria monoidal** é uma categoria* $\mathbf{C}$ *equipada com:*

- *um objeto*

$$I \in \mathbf{C}$$

  chamado o objeto de unidade *ou* unidade tensor*;*

- *Um bifuntor* $- \otimes -$*, que corresponde a uma operação em objetos e morfismos tal que*

$$- \otimes - : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C} :: (A, B) \mapsto A \otimes B \tag{6.3}$$

$$- \otimes - : \mathbf{C}(A, B) \times \mathbf{C}(C, D) \to \mathbf{C}(A \otimes C, B \otimes D) :: (f, g) \mapsto f \otimes g. \tag{6.4}$$

  e para todos os objetos A, B *e morfismos* f, g, h, k *do tipo adequado, temos*

$$(g \circ f) \otimes (k \circ h) = (g \otimes k) \circ (f \otimes h) \quad e \quad 1_A \otimes 1_B = 1_{A \otimes B} \tag{6.5}$$

- *Três isomorfismos naturais*

$$\alpha_{A,B,C} : A \otimes (B \otimes C) \xrightarrow{\sim} (A \otimes B) \otimes C\,;$$

$$\lambda_A : I \otimes A \xrightarrow{\sim} A;$$

$$\rho_A : A \otimes I \xrightarrow{\sim} A.$$

e para todos A, B, C, D, A', B', C' e f, g, h do tipo adequado, os seguintes diagramas comutam

$$\begin{tikzcd} A \otimes (B \otimes C) \arrow[r, "\alpha_{A,B,C}"] \arrow[d, "f\otimes(g\otimes h)"'] & (A \otimes B) \otimes C \arrow[d, "(f\otimes g)\otimes h"] \\ A' \otimes (B' \otimes C') \arrow[r, "\alpha_{A',B',C'}"'] & (A' \otimes B') \otimes C' \end{tikzcd} \tag{6.6}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\lambda_A"] \arrow[d, "f"'] & I \otimes A \arrow[d, "1_I\otimes f"] \\ B \arrow[r, "\lambda_B"'] & I \otimes B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\rho_A"] \arrow[d, "f"'] & A \otimes I \arrow[d, "f\otimes 1_I"] \\ B \arrow[r, "\rho_B"'] & B \otimes I \end{tikzcd} \tag{6.7}$$

O diagrama 6.6 corresponde a condições de naturalidade, mostrando que esses isomorfismos interagem com morfismos na maneira apropriada.

Outra condição é a associatividade, conhecido como o pentágono de Mac Lane (MACLANE, 1998)

$$\begin{tikzcd} & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[dr, "\alpha"] & \\ A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[d, "1_A\otimes\alpha"'] & & ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \\ A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[rr, "\alpha"'] & & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[u, "\alpha\otimes 1_D"'] \end{tikzcd} \tag{6.8}$$

tal diagrama comuta para todo $A, B, C, D \in \mathbf{C}$.

Por último, a condições de coerência, mostrando os isomorfismos interagindo uns com os outros de maneira correta.

$$\begin{tikzcd} A \otimes B \arrow[r, "1_A\otimes\lambda_B"] \arrow[dr, "\rho_A\otimes 1_B"'] & A \otimes (I \otimes B) \arrow[d, "\alpha_{A,I,B}"] \\ & (A \otimes I) \otimes B \end{tikzcd} \tag{6.9}$$

$$\lambda_I = \rho_I \,. \tag{6.10}$$

Exemplo 6.2. *Qualquer categoria com produtos finitos pode ser considerada como monoidal com o produto como o produto monoidal e o objeto terminal como unidade.*

- ***Set***, *a categoria de conjuntos com o produto cartesiano, conjuntos de um elemento que serve como a unidade.*

Exemplo 6.3. $Vect_K$ *, a categoria de espaços vetoriais sobre um campo de K, com o espaço vetorial unidimensional K servindo como a unidade é uma categoria monoidal.*

Definição 6.3. *Uma categoria monoidal é além disso **simétrica** se existe um quarto isomorfismo natural*

$$\sigma = \{A \otimes B \xrightarrow{\sigma_{A,B}} B \otimes A \mid A, B \in \mathbf{C}\},$$

tal que para todo A, B, C, D e f, g do tipo apropriado, os seguinte diagramas comutam:

- *Condição de naturalidade*

$$\begin{tikzcd} A \otimes B \arrow[r, "\sigma_{A,B}"] \arrow[d, "f \otimes g"'] & B \otimes A \arrow[d, "g \otimes f"] \\ C \otimes D \arrow[r, "\sigma_{C,D}"'] & D \otimes C \end{tikzcd} \tag{6.11}$$

- *Condição do isomorfismo de simetria*

$$\begin{tikzcd} A \otimes B \arrow[r, "\sigma_{A,B}"] \arrow[dr, "1_{A \otimes B}"'] & B \otimes A \arrow[d, "\sigma_{B,A}"] \\ & A \otimes B \end{tikzcd} \tag{6.12}$$

- *Condições de coerência*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\lambda_A"] \arrow[dr, "\rho_A"'] & I \otimes A \arrow[d, "\sigma_{I,A}"] \\ & A \otimes I \end{tikzcd} \tag{6.13}$$

$$\begin{tikzcd} A \otimes (B \otimes C) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "1_A \otimes \sigma_{B,C}"'] & (A \otimes B) \otimes C \arrow[r, "\sigma_{(A \otimes B),C}"] & C \otimes (A \otimes B) \arrow[d, "\alpha"] \\ A \otimes (C \otimes B) \arrow[r, "\alpha"'] & (A \otimes C) \otimes B \arrow[r, "\sigma_{A,C} \otimes 1_B"'] & (C \otimes A) \otimes B \end{tikzcd} \tag{6.14}$$

Exemplo 6.4. *A categoria **Sets** é monoidal simétrica, o produto tensor é definido como produto cartesiano, e qualquer conjuntos de um elemento pode ser fixado como o objeto de unidade.*

Exemplo 6.5. *A categoria de grupos, **Grp** é monoidal simétrica. O produto tensor é apenas o produto cartesiano de grupos, e o grupo trivial é o objeto de unidade. Em geral, uma categoria com produtos finitos é uma categoria monoidal cartesiana, que é monoidal simétrica.*

Definição 6.4. *Uma categoria monoidal **dagger** é uma categoria monoidal* $\mathbf{C}$ *equipada com um funtor contravariante involutivo*

$$\dagger : \mathbf{C}^{op} \rightarrow \mathbf{C}\,,$$

que é a identidade em objetos, satisfazendo a equação:

$$(f \otimes g)^{\dagger} = f^{\dagger} \otimes g^{\dagger}\,. \tag{6.15}$$

Em detalhe, isto significa que ele associa a cada morfismo $f : A \rightarrow B$ *em* $\mathbf{C}$ *seu adjunto* $f^{\dagger} : B \rightarrow A$ *tal que para todos* $f : A \rightarrow B$ *e* $g : B \rightarrow C$*, temos:*

- $id_A = {id_A}^{\dagger} : A \rightarrow A$;
- $(g \circ f)^{\dagger} = f^{\dagger} \circ g^{\dagger}$;
- $f^{\dagger\dagger} = f : A \rightarrow B$.

Observação 6.1. *Na literatura em Mecânica Quântica Categórica é costume chamar esta noção, que generaliza o operador adjunto entre espaços de Hilbert, apenas pelo nome do símbolo obelisco (†), que em inglês se chama* dagger*, que adotaremos nesta dissertação.*

Em uma categoria *dagger* $\mathbf{C}$, um morfismo f é chamado

- Unitário : $f^{\dagger} = f^{-1}$
- Auto-Adjunto: $f = f^{\dagger}$
  (isto só é possível para um endomorfismo $f : A \rightarrow A$)

Definição 6.5. *Uma categoria monoidal simétrica dagger* ($\dagger-SMC$)*é uma categoria monoidal simétrica* $\mathbf{C}$*, que também tem uma estrutura dagger tal que para todos* $f : A \rightarrow B$*,* $g : C \rightarrow D$*,*

- $(f \otimes g)^{\dagger} = f^{\dagger} \otimes g^{\dagger} \;\; : B \otimes D \rightarrow A \otimes C$
- $\alpha^{\dagger}_{A,B,C} = \alpha^{-1}_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \rightarrow A \otimes (B \otimes C)$;
- $\rho^{\dagger}_A = \rho^{-1}_A : A \rightarrow A \otimes I$;

- $\lambda_A^\dagger = \lambda_A^{-1} : A \to I \otimes A$;
- $\sigma_{A,B}^\dagger = \sigma_{A,B}^{-1} : B \otimes A \to A \otimes B$;

Aqui α, ρ, λ e σ são os isomorfismos naturais que formam a estrutura monoidal simétrica.

Exemplo 6.6. *A categoria **FdHilb** de espaços de Hilbert de dimensão finita (COECKE; EDWARDS, 2008) possui uma estrutura dagger: Dado um mapa linear $f : A \to B$, o mapa $f^\dagger : B \to A$ é apenas o seu adjunto no sentido usual. **FdHilb** também é uma categoria monoidal simétrica dagger onde o tensor é o produto tensorial usual de espaços de Hilbert e o dagger de um mapa linear é dada pelo seu adjunto hermitiano.*

Exemplo 6.7. *A categoria **Rel** de conjuntos e relações possui uma estrutura dagger ou seja, para uma dada relação $R : X \to Y$, em **Rel**, a relação $R^\dagger : Y \to X$ é o inverso de R relacional. Neste exemplo, um morfismo auto-adjunto é uma relação simétrica. A categoria **Rel** também é uma categoria monoidal simétrica dagger onde o tensor é dada pelo produto e onde a dagger de uma relação é dada por sua recíproca relacional.*

7 Mecânica Quântica Categórica

A estrutura monoidal que definimos no capítulo anterior forma uma base para uma abordagem categórica de sistemas clássicos assim como quânticos. Em particular, como apontado por Schrödinger (1935), a descrição do produto tensorial de sistemas quânticos compostos é o que faz a física quântica tão diferente da física clássica.

Coecke (2011) estuda a natureza dos tensores para as categorias **Set**, **Rel**, **FdHilb** (a categoria com espaços de Hilbert de dimensão finita como objetos e os mapas lineares como morfismo) e **nCob** (a categoria de cobordismo onde os morfismos são cobordismos n-dimensionais) como segue no quadro abaixo:

categoria	**classical-like**	**quantum-like**
Set	$\times$	
Rel	$+$	$\times$
FdHilb	$\oplus$	$\otimes$
nCob		$+$

7.1 Categorias Quânticas

Vamos agora introduzir uma das características fundamentais de sistemas quânticos-*like*, distinguindo-os dos seus homólogos clássicos.

Em teoria das categorias, *categorias compactas fechadas* são um contexto geral para o tratamento de objetos duais. A ideia de um objeto dual generaliza o conceito mais familiar de um espaço vetorial dual de dimensão finita.

Definição 7.1. *Uma **categoria compacta fechada** $\mathbf{C}$ é uma categoria monoidal simétrica com as seguintes propriedades:*

1. *para todo $A \in \mathbf{C}$ existe A^*, o dual de A;*

2. *um par de morfismos*

$$I \xrightarrow{\eta_A} A^* \otimes A \quad e \quad A \otimes A^* \xrightarrow{\epsilon_A} I\,,$$

chamados, respectivamente, unidade e co-unidade; de modo que os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\rho_A"] \arrow[d, "1_A"'] & A \otimes I \arrow[r, "1_A \otimes \eta_A"] & A \otimes (A^* \otimes A) \arrow[d, "\alpha_{A,A^*,A}"] \\
A & I \otimes A \arrow[l, "\lambda_A^{-1}"] & (A \otimes A^*) \otimes A \arrow[l, "\epsilon_A \otimes 1_A"]
\end{tikzcd} \tag{7.1}$$

$$\begin{tikzcd}
A^* \arrow[r, "\lambda_{A^*}"] \arrow[d, "1_{A^*}"'] & I \otimes A^* \arrow[r, "\eta_A \otimes 1_{A^*}"] & (A^* \otimes A) \otimes A^* \arrow[d, "\alpha^{-1}_{A^*,A,A^*}"] \\
A^* & A^* \otimes I \arrow[l, "\rho^{-1}_{A^*}"] & A^* \otimes (A \otimes A^*) \arrow[l, "1_{A^*} \otimes \epsilon_A"]
\end{tikzcd} \tag{7.2}$$

Exemplo 7.1. *A categoria* ***FdVect***$_{\mathbb{K}}$ *com espaços vetoriais de dimensão finita como objetos e mapas lineares como morfismos é compacta. Considere o espaço dual usual V^* sendo o objeto dual V e a unidade como sendo:*

$$\eta_V : \mathbb{K} \to V^* \otimes V :: 1 \mapsto \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes e_i$$

onde $\{e_i\}_{i=1}^n$ é uma base de V e $f_j \in V^*$ é a função linear tal que $f_j(e_i) = \delta_{i,j}$ para todo $1 \leq i, j \leq n$. Finalmente, definimos a co-unidade como sendo:

$$\epsilon_V : V \otimes V^* \to \mathbb{K} :: e_i \otimes f_j \mapsto f_j(e_i)\,.$$

De modo que os diagramas 7.1 e 7.2 comutam.

Definição 7.2. *Uma **categoria compacta dagger C** é ao mesmo tempo uma categoria compacta e uma categoria monoidal simétrica dagger, tal que para todo $A \in \mathbf{C}$,*

$$\eta_A = \sigma_{A,A^*} \circ \epsilon_A^\dagger \quad (\epsilon_A = \eta_A^\dagger \circ \sigma_{A,A^*}).$$

Exemplo 7.2. *A categoria **FdHilb** de espaços de Hilbert de dimensão finita e mapas lineares é uma categoria compacta fechada dagger. Os morfismos são operadores lineares entre espaços de Hilbert. O produto é o produto tensorial de costume, e o dagger aqui é o conjugado Hermitiano.*

Exemplo 7.3. *A categoria **Rel** de Conjuntos e relações é uma categoria compacta fechada dagger. O produto é, evidentemente, o produto cartesiano. O dagger aqui é exatamente a relação oposta.*

7.2 Categorias clássicas

Os tensores a que nos referimos como classical-*like* não são compactos. Em vez disso, eles vêm com alguma outra estrutura (Categorias cartesianas) que, em todos os casos não-triviais, acaba por ser incompatível com a compacidade.

Podemos pensar em *Categorias Cartesianas* como os homólogos clássicos das categorias compactas fechadas em que eles fornecem os primeiros passos na definição de propriedades clássicas em um sistema.

As definições de produto e co-produto foram vistas na subseção 3.3.2.

Definição 7.3. *Uma categoria* **C** *é cartesiana fechada se qualquer par de objetos em* **C** *admite um produto.*

Similarmente, uma categoria **C** é co-cartesiana se qualquer par de objetos em **C** admite um co-produto.

Interligamos as noções de produto e co-produto com a noção de biprodutos (ou somas diretas). Primeiramente, devemos observar que um **objeto zero** é um objeto que é ao mesmo tempo inicial e terminal, ou seja, é um objeto com exatamente um morfismo dele para cada objeto (incluindo o próprio).

Definição 7.4. Em uma categoria **C**, com um objeto zero, um **biproduto** (ou soma direta) de dois objetos $A_1, A_2 \in \mathbf{C}$ é uma quíntupla que consiste do objeto $A \oplus B \in \mathbf{C}$ e quatro morfismos:

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, bend left, "\iota_1"] & A_1 \oplus A_2 \arrow[l, bend left, "\pi_1"] \arrow[r, bend right, "\pi_2"'] & A_2 \arrow[l, bend right, "\iota_2"'] \end{tikzcd}$$

satisfazendo,

$$\pi_1 \circ \iota_1 = 1_{A_1} \qquad \pi_2 \circ \iota_2 = 1_{A_2} \qquad \pi_2 \circ \iota_1 = 0_{A_1,A_2} \qquad \pi_1 \circ \iota_2 = 0_{A_2,A_1} \tag{7.3}$$

e

$$\iota_1 \circ \pi_1 + \iota_2 \circ \pi_2 = 1_{A_1 \oplus A_2}\,.$$

Uma categoria **C** é uma categoria biproduto se qualquer par de objetos em **C** admite um biproduto.

Exemplo 7.4. *A categoria* ***Set*** *de conjuntos, e funções como morfismos, é catesiana fechada. O produto $X \times Y$ é o produto cartesiano de X e Y, e Z^Y é o conjunto de todas as funções de Y para Z. O adjunto é expresso pelo seguinte fato: a função $f : X \times Y \to Z$ é naturalmente identificado com a função de currying ((HANUS, 2012)) $g : X \to Z^Y$ definido por $g(x)(y) = f(x, y)$ para todo $x \in X$ e $y \in Y$.*

7.3 Operação de cópia, de exclusão e estrutura de base

Podemos estudar os conceitos de cópia e exclusão utilizando uma abordagem categórica. Para isso, vamos definir logo mais a noção da estrutura de monóide e comonóide interno.

Em computação clássica a ideia de copiar e excluir informações parece fundamental em qualquer dispositivo prático. No entanto, esta é uma área onde os computadores quânticos e computadores clássicos diferem significativamente; em computação quântica não podemos copiar ou apagar qubits arbitrariamente.

O que vem a ser as operações de cópia e exclusão em noções categóricas?

A operação de *cópia* (ou diagonal) em uma categoria monoidal $\mathbf{C}$, significa uma transformação natural

$$\delta = \left\{ A \xrightarrow{\delta_A} A \otimes A \;\middle|\; A \in \mathbf{C} \right\} .$$

O requisito de comutatividade correspondente

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\delta_A"'] & B \arrow[d, "\delta_B"] \\ A \otimes A \arrow[r, "f \otimes f"'] & B \otimes B \end{tikzcd}$$

expressa que "quando executamos a operação f em um sistema A e depois copiamo", é o mesmo que "copiar o sistema A e, em seguida, executar a operação f em cada cópia".

Proposição 7.1. *Cada Categoria Cartesiana admite uma operação de cópia uniforme.*

Prova. De fato, seja

$$\delta_A := \langle 1_A, 1_A \rangle$$

e $A \xrightarrow{f} B$ arbitrário. Então temos que

$$\langle 1_B, 1_B \rangle \circ f = \langle 1_B \circ f, 1_B \circ f \rangle = \langle f \circ 1_A, f \circ 1_A \rangle = (f \times f) \circ \langle 1_A, 1_A \rangle ,$$

assim, δ é uma transformação natural, e, portanto, uma operação de cópia uniforme. ■

Na verdade, podemos definir as categorias cartesianas em termos da existência de uma operação de cópia e uma correspondente operação de exclusão:

$$\varepsilon = \left\{ A \xrightarrow{\varepsilon_A} I \;\middle|\; A \in \mathbf{C} \right\} ,$$

de modo que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varepsilon_A"'] & B \arrow[dl, "\varepsilon_B"] \\ I & \end{tikzcd}$$

comuta.

Definição 7.5. *Seja* $(\mathbf{C}, \otimes, I)$ *uma categoria monoidal. Um comonóide interno é um objeto* $X \in \mathbf{C}$ *em conjunto com um par de morfismos*

$$X \otimes X \xleftarrow{\delta} X \xrightarrow{\epsilon} I\,,$$

onde δ *é a* co-multiplicação *(ou co-associatividade) e* ϵ *a* co-unidade*, tais que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & X\otimes X \arrow[d, "1_X\otimes\delta"] \\ X\otimes X \arrow[r, "\delta\otimes 1_X"'] & X\otimes X\otimes X \end{tikzcd} \quad e \quad \begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\simeq"'] \arrow[d, "\delta"] \arrow[dr, "\simeq"] & \\ I\otimes X & X\otimes X \arrow[l, "\epsilon\otimes 1_X"] \arrow[r, "1_X\otimes\epsilon"'] & X\otimes I \end{tikzcd}$$

A noção de monóide interno é dual com a noção de comonóide interno, ou seja, um monóide em $(\mathbf{C}, \otimes, I)$ é simplesmente um comonóide em $(\mathbf{C}^{OP}, \otimes, I)$.

Definição 7.6. *Seja* $(\mathbf{C}, \otimes, I)$ *uma categoria monoidal. Um monóide interno é um objeto* $X \in \mathbf{C}$ *em conjunto com um par de morfismos*

$$X \otimes X \xrightarrow{\mu} X \xleftarrow{e} I\,,$$

onde μ *é a* multiplicação *e o* e *a* unidade*, tais que os seguintes diagramas*

$$\begin{tikzcd} X & X\otimes X \arrow[l, "\mu"'] \\ X\otimes X \arrow[u, "\mu"] & X\otimes X\otimes X \arrow[l, "\mu\otimes 1_X"] \arrow[u, "1_X\otimes\mu"'] \end{tikzcd} \quad e \quad \begin{tikzcd} & X & \\ I\otimes X \arrow[ur, "\simeq"] \arrow[r, "e\otimes 1_X"'] & X\otimes X \arrow[u, "\mu"] & X\otimes I \arrow[ul, "\simeq"'] \arrow[l, "1_X\otimes e"] \end{tikzcd}$$

comutam.

Em uma categoria monoidal *dagger* podemos definir um monóide dado o comonóide ou vice-versa. Como segue o lema.

Lema 7.1. *Em uma categoria monoidal dagger, cada comonóide interno (co-comutativo)*

$$\left(X\,,\,X \xrightarrow{\delta} X\otimes X\,,\,X \xrightarrow{\epsilon} I\right)$$

define uma monóide interno (comutativo)

$$\left(X\,,\,X\otimes X \xrightarrow{\delta^\dagger} X\,,\,I \xrightarrow{\epsilon^\dagger} X\right).$$

Prova. A partir da lei associativa em (X, δ, ϵ) obtemos,

$$\begin{aligned} \delta\circ(\delta\otimes 1_X) &= \delta\circ(1_X\otimes\delta) \\ (\delta\circ(\delta\otimes 1_X))^\dagger &= (\delta\circ(1_X\otimes\delta))^\dagger \\ (\delta\otimes 1_X)^\dagger\otimes\delta^\dagger &= (1_X\otimes\delta)^\dagger\otimes\delta^\dagger \\ (\delta^\dagger\otimes 1_X)\otimes\delta^\dagger &= (1_X\otimes\delta^\dagger)\otimes\delta^\dagger \end{aligned}$$

aplicando a lei associativa em $(X, \delta^\dagger, \epsilon^\dagger)$. Também a partir da lei da unidade em (X, δ, ϵ) obtemos,

$$\begin{aligned} \delta\circ(\epsilon\otimes 1_X) &= 1_X = \delta\circ(1\otimes\epsilon) \\ (\delta\circ(\epsilon\otimes 1_X))^\dagger &= 1_X = (\delta\circ(1\otimes\epsilon))^\dagger \\ (\epsilon^\dagger\otimes 1_X)\otimes\delta &= 1_X = (1_X\otimes\epsilon^\dagger)\otimes\delta^\dagger \end{aligned}$$

através da lei da unidade em $(X, \delta^\dagger, \epsilon^\dagger)$. Finalmente a partir de comutatividade em (X, δ, ϵ) temos,

$$\delta\circ\sigma = \delta$$
$$(\delta\circ\sigma)^\dagger = \delta^\dagger$$
$$\sigma^\dagger\circ\delta^\dagger = \sigma\circ\delta^\dagger = \delta^\dagger$$

∎

Definição 7.7. *Uma estrutura monoidal dagger interna é uma estrutura de monoide interno (X, μ, e) juntamente com uma estrutura de comonóide interno (X, δ, ϵ) de tal forma que a estrutura de comonóide é o dagger da estrutura de monoide. Ou seja, $\mu^\dagger = \delta$ e $e^\dagger = \epsilon$. A combinação de uma estrutura de monóide e de comonóide também pode ser escrita como $(X, \mu, e, \delta, \epsilon)$.*

Definição 7.8. *Uma álgebra Frobenius em uma categoria monoidal é uma quíntupla $(X, \mu, e, \delta, \epsilon)$ tal que*

- (X, μ, e) *é um monóide;*
- (X, δ, ϵ) *é um comonóide;*
- *satisfazendo a condição de Frobenius:*

$$(1_X\otimes\delta^\dagger)\circ(\delta\otimes 1_X) = \delta\circ\delta^\dagger = (\delta^\dagger\otimes 1_X)\circ(1_X\otimes\delta)\,.$$

Definição 7.9. *Uma algebra de Frobenius é chamada isométrica ou especial se*

$$\mu \circ \delta = 1$$

ou seja,

$$\delta^\dagger \circ \delta = 1.$$

Definição 7.10. *Um morfismo $f : X \to Y$ é um homomorfismo monoidal para monóides internos (X, μ, e) e (Y, μ', e') se*

$$f \circ \mu = \mu' \circ (f \otimes f) \quad e \quad f \circ e = e'$$

e um homomorfismo comonidal para comonoides (X, δ, ϵ) e (Y, δ', ϵ') se

$$\delta' \circ f = (f \otimes f) \circ \delta \quad e \quad \epsilon' \circ f = \epsilon.$$

Definição 7.11. *Um elemento copiável (ou elemento clássico) em relação a (X, μ, e) é um homomorfismo comonidal $\alpha : I \to X$, isto é, os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\delta"'] & X \arrow[d, "\delta"] \\ I \otimes I \arrow[r, "\alpha\otimes\alpha"'] & X \otimes X \end{tikzcd} \quad e \quad \begin{tikzcd} I \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, "1_I"] & \\ X \arrow[r, "\epsilon"'] & I \end{tikzcd}$$

Note que esses dois diagramas mostram o elemento copiável e eliminável respectivamente, embora ainda só é referido como copiável. O nome *clássico* vem das propriedades clássicas de que dispõe.

Definição 7.12. *Uma estrutura de base é um comonóide interno co-comutativo*

$$(X, \delta : X \to X \otimes X, \epsilon : X \to I)$$

- $(\delta \otimes 1_X) \circ \delta = (1_X \otimes \delta) \circ \delta$;
- ${\lambda_X}^{-1} \circ (\epsilon \otimes 1_X) \circ \delta = {\rho_X}^{-1} \circ (1_X \otimes \epsilon) \circ \delta = 1_X$;
- $\sigma_{X,X} \circ \delta = \delta$.

que, além disso é isométrica (especial) e obedece a identidade de Frobenius, isto é, respectivamente,

$$\delta^\dagger \circ \delta = 1_X$$

e

$$(1_X \otimes \delta^\dagger) \circ (\delta \otimes 1_X) = \delta \circ \delta^\dagger = (\delta^\dagger \otimes 1_X) \circ (1_X \otimes \delta).$$

Em outras palavras, uma estrutura de base é uma álgebra Frobenius dagger que também é comutativa e especial.

8 Estruturas na Categoria dos Espaços de Chu

O nosso olhar agora é direcionado a investigar as potencialidades no qual fomos motivados pela rica estrutura dos Espaços de Chu.

Os teoremas 8.1,8.2, 8.3 são todos trabalhos originais.

8.1 Chu_K : Uma categoria monoidal simétrica

Teorema 8.1. *Chu_K com o produto tensorial $\otimes$, é uma categoria monoidal simétrica.*

Prova. Na seção 4.1 descrevemos a categoria Chu_K. No entanto, para mostrar que esta é uma categoria monoidal devemos mostrar que satisfaz as equações 6.5 -6.10, para a simetria, as equações 6.11-6.14 e para que seja dagger, a 6.15.

Vimos que a unidade do produto tensorial é o espaço de Chu com um ponto e $|K|$ estados, denotado por $\mathbf{1}$.

Considere os espaços $\mathcal{A} = (A, r, X), \mathcal{B} = (B, s, Y) \quad e \quad \mathcal{C} = (C, t, Z)$, temos:

- Para o isomorfismo natural α, vimos na proposição 4.2 que o tensorial é associativo, assim: $\alpha_{\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}} : \mathcal{A} \otimes (\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}) \to (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \otimes \mathcal{C} : \alpha_{\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}} : (a, (b, c)) = ((a, b), c)$;

  Na proposição 4.3, mostramos que os isomorfismos λ e ρ estão bem definimos em Chu.

- $\lambda_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to 1 \otimes \mathcal{A} :: \lambda_{\mathcal{A}}(a) = (*, a)$;

- $\rho_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes 1 :: \rho_{\mathcal{A}}(a) = (a, *)$.

pela funtorialidade de $\otimes$ visto na seção 4.2, temos que:

$$(h \otimes k) \circ (f \otimes g)(a, b) = (h \otimes k) \circ (f(a), g(b)) = (h \circ f(a), k \circ g(b)) = (h \circ f) \otimes (k \circ g)(a, b)$$

onde $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}', g : \mathcal{B} \to \mathcal{B}', h : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}'' \quad e \quad k : \mathcal{B}' \to \mathcal{B}''$.

- Para a simetria, vimos na proposição 4.2 que o tensorial é comutativo, e assim o isomorfismo natural σ para o espaço de Chu é :

  $\sigma_{\mathcal{A},\mathcal{B}} :: \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} :: \sigma_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(a, b) = (b, a).$

De modo que os seguintes diagramas comutam

Condição 6.14

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \otimes (\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "1_{\mathcal{A}} \otimes \sigma_{\mathcal{B},\mathcal{C}}"'] & (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \otimes \mathcal{C} \arrow[r, "\sigma_{(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}),\mathcal{C}}"] & \mathcal{C} \otimes (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \arrow[d, "\alpha"] \\
\mathcal{A} \otimes (\mathcal{C} \otimes \mathcal{B}) \arrow[r, "\alpha"'] & (\mathcal{A} \otimes \mathcal{C}) \otimes \mathcal{B} \arrow[r, "\sigma_{\mathcal{A},\mathcal{C}} \otimes 1_{\mathcal{B}}"'] & (\mathcal{C} \otimes \mathcal{A}) \otimes \mathcal{B}
\end{tikzcd} \tag{8.1}$$

Esta condição sai imediatamente da proposição 4.2 onde mostramos que o tensor é comutativo e associativo!

Condição 6.9

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \arrow[r, "1_{\mathcal{A}} \otimes \lambda_{\mathcal{B}}"] \arrow[dr, "\rho_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{B}}"'] & \mathcal{A} \otimes (1 \otimes \mathcal{B}) \arrow[d, "\alpha_{\mathcal{A},1,\mathcal{B}}"] \\
 & (\mathcal{A} \otimes 1) \otimes \mathcal{B}
\end{tikzcd} \tag{8.2}$$

Esta condição segue das proposições 4.2 e 4.3

e para a condição 6.13 temos:

$$\sigma_{I,\mathcal{A}} \circ \lambda_{\mathcal{A}}(a) = \sigma_{I,\mathcal{A}}(*, a) = (a, *) = \rho_{\mathcal{A}}(a)$$

Omitimos os demais diagramas para efeito de objetividade.

Com isso, mostramos que Chu_K é uma categoria monoidal simétrica. ■

Observação 8.1. *Chu_K com respeito a $\oplus$, a soma direta, é uma categoria monoidal. De fato, a unidade monoidal para $\oplus$ é o espaço de Chu vazio **0**, não tem ponto e possui apenas um estado. O isomorfismo natural α é definido como no caso $\otimes$.*

- $\lambda_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to 0 \oplus \mathcal{A} :: \lambda_{\mathcal{A}}(a) = (0, a);$

- $\rho_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \oplus 0 :: \rho_{\mathcal{A}}(a) = (a, 0).$

Contudo, a categoria Chu_K com respeito a $\oplus$ não é simétrica, pois a soma direta não é comutativa, como vimos na proposição 4.4.

8.2 Chu_K : Tensor Quântico

Como definimos na seção 7.1, as características de sistemas quânticos estão intimimamente ligadas as categorias compactas fechadas, que nos dão um contexto geral para o uso de objetos duais.

Teorema 8.2. *Chu_K é uma categoria compacta fechada com respeito ao produto tensorial.*

Prova. O operador dual do espaço de Chu é o $(\_)^{\perp}$ assim, dado o espaço $\mathcal{A} = (A, r, X)$, o seu espaço dual é $\mathcal{A}^{\perp} = (X, \breve{r}, A)$. Com isso, pela definição 7.1, devemos mostrar que:

1. $\lambda_{\mathcal{A}}^{-1} \circ (\epsilon_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{A}}) \circ \alpha_{\mathcal{A},\mathcal{A}^{\perp},\mathcal{A}} \circ (1_{\mathcal{A}} \otimes \eta_{\mathcal{A}}) \circ \rho_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{A}}$
2. $\rho_{\mathcal{A}^{\perp}}^{-1} \circ (1_{\mathcal{A}^{\perp}} \otimes \epsilon_{\mathcal{A}}) \circ \alpha^{-1}_{\mathcal{A}^{\perp},\mathcal{A},\mathcal{A}^{\perp}} \circ (\eta_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{A}^{\perp}}) \circ \lambda_{\mathcal{A}^{\perp}} = 1_{\mathcal{A}^{\perp}}$.

Primeiramente, vamos definir o que consiste os morfismos $\eta_{\mathcal{A}}$ e $\epsilon_{\mathcal{A}}$:

- O morfismo $\eta_{\mathcal{A}}$ é composto pelo par $\eta_{\mathcal{A}} : (\eta'_{\mathcal{A}}, \eta''_{\mathcal{A}})$, tal que:

$$\begin{aligned} (\eta'_{\mathcal{A}}, \eta''_{\mathcal{A}}) \quad &: \quad 1 \to \mathcal{A}^{\perp} \otimes \mathcal{A} \\ &: \quad (\{*\}, s, K) \to (X \times A, t, \mathcal{F}) \end{aligned}$$

  com

$$\eta'_{\mathcal{A}} : \{*\} \to X \times A \quad e \quad \eta''_{\mathcal{A}} : \mathcal{F} \to K.$$

  de modo que

$$t(\eta'_{\mathcal{A}}(*), (f_1, f_2)) = r(a, f_1(x)) = \breve{r}(x, f_2(a)) = s(*, \eta''_{\mathcal{A}}(f_1, f_2))$$

  acontece para todos $(f_1, f_2) \in \mathcal{F}$ e $t : (X \times A) \times \mathcal{F} \to K$. Onde $\mathcal{F}$ consiste do conjunto de todos os pares (f_1, f_2), tais que $f_1 : X \to X$ e $f_2 : A \to A$.

- O morfismo $\epsilon_{\mathcal{A}}$ consiste do par $\epsilon_{\mathcal{A}} : (\epsilon'_{\mathcal{A}}, \epsilon''_{\mathcal{A}})$, que satisfaz:

$$\begin{aligned} (\epsilon'_{\mathcal{A}}, \epsilon''_{\mathcal{A}}) \quad &: \quad \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^{\perp} \to 1 \\ &: \quad (A \times X, t', \mathcal{F}') \to (\{*\}, s, K) \end{aligned}$$

  tal que,

$$\epsilon'_{\mathcal{A}} : A \times X \to \{*\} \quad e \quad \epsilon''_{\mathcal{A}} : K \to \mathcal{F}'$$

  satisfazendo,

$$s(\epsilon'_{\mathcal{A}}(a, x), k) = r(a, \mathbf{f}_2(x)) = \breve{r}(x, \mathbf{f}_1(a)) = t'((a, x), \epsilon''_{\mathcal{A}}(k))$$

  para todo $k \in K$ e $t' : (A \times X) \times \mathcal{F}' \to K$. Onde $\mathcal{F}'$ consiste de todos os pares $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ de funções $\mathbf{f}_1 : A \to A$ e $\mathbf{f}_2 : X \to X$.

Esta prova se resume mostrar apenas a equação 1. O item 2 sai de forma análoga.

Na proposição 4.3 verificamos o isomorfismo $\rho_{\mathcal{A}}$, esse morfismo é representado pelo par:

$$\begin{aligned}\rho_{\mathcal{A}} : (f, g) \quad &: \quad \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes 1 \\ &: \quad (A, r, X) \to (A \times \{*\}, \tau, \mathcal{G})\end{aligned}$$

$$f : A \to A \times \{*\} \quad e \quad g : \mathcal{G} \to X.$$

Onde $\mathcal{G}$ é o conjunto de todos os pares $g_1 : A \to K, g_2 : \{*\} \to X$. tal que

$$\tau(f(a), (g_1, g_2)) = r(a, g_2(*)) = s(*, g_1(a)) = r(a, g(g_1, g_2)).$$

Sabendo que a identidade de $\mathcal{A}$ corresponde a $1_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ e $\eta_{\mathcal{A}} : 1 \to \mathcal{A}^{\perp} \otimes \mathcal{A}$, o produto $1_{\mathcal{A}} \otimes \eta_{\mathcal{A}}$ é o par de morfismos (d_1, d_2) :

$$\begin{aligned}1_{\mathcal{A}} \otimes \eta_{\mathcal{A}} = (d_1, d_2) \quad &: \quad \mathcal{A} \otimes 1 \to \mathcal{A} \otimes (\mathcal{A}^{\perp} \otimes \mathcal{A}) \\ &: \quad (A \times \{*\}, t, \mathcal{G}) \to (A \times X \times A, u, \mathcal{H})\end{aligned}$$

$$d_1 : A \times \{*\} \to A \times X \times A \quad e \quad d_2 : \mathcal{H} \to \mathcal{G}.$$

Onde $\mathcal{H}$ consiste de todas as funções $m : A \times X \times A \to K$ satisfazendo a conjunção das três condições vistas na proposição 4.2.

Assim, temos que a composta $(1_{\mathcal{A}} \otimes \eta_{\mathcal{A}}) \circ \rho_{\mathcal{A}}$ é dada por:

$$(d_1, d_2) \circ (f, g) = (d_1 \circ f, g \circ d_2) = (A \to A \times X \times A, \mathcal{H} \to X)$$

Esta composta é por si só um par adjunto pois para todo $a \in A$ e $\mathbf{h} \in \mathcal{H}$ temos que:

$$u(d_1 \circ f(a)), \mathbf{h}) = t(f(a), d_2(\mathbf{h})) = r(a, g \circ d_2(\mathbf{h})).$$

O isomorfismo natural $\alpha_{\mathcal{A},\mathcal{A}^{\perp},\mathcal{A}}$ pode ser visto como o par (α_1, α_2) tal que:

$$\begin{aligned}\alpha_{\mathcal{A},\mathcal{A}^{\perp},\mathcal{A}} = (\alpha_1, \alpha_2) \quad &: \quad \mathcal{A} \otimes (\mathcal{A}^{\perp} \otimes \mathcal{A}) \to (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^{\perp}) \otimes \mathcal{A} \\ &: \quad (A \times X \times A, u, \mathcal{H}) \to (A \times X \times A, u, \mathcal{H})\end{aligned}$$

$$\alpha_1 : A \times X \times A \to A \times X \times A \quad e \quad \alpha_2 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}.$$

Com isso, a composta $\alpha_{\mathcal{A},\mathcal{A}^{\perp},\mathcal{A}} \circ (1_{\mathcal{A}} \otimes \eta_{\mathcal{A}}) \circ \rho_{\mathcal{A}}$ é dada por:

$$(\alpha_1, \alpha_2) \circ (d_1 \circ f, g \circ d_2) = (\alpha_1 \circ d_1 \circ f, g \circ d_2 \circ \alpha_2) = (A \to A \times X \times A, \mathcal{H} \to X).$$

Esta composta é um par adjunto, pois para todo $a \in A$ e $\mathbf{h} \in \mathcal{H}$ temos:

$$u(\alpha_1 \circ d_1 \circ f(a), \mathbf{h}) = r(a, g \circ d_2 \circ \alpha_2(\mathbf{h}))$$

O produto $\epsilon_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{A}}$ equivale ao morfismo cujo par é (e_1, e_2) :

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{A}} = (e_1, e_2) &: \quad (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^{\perp}) \otimes \mathcal{A} \to 1 \otimes \mathcal{A} \\ &: \quad (A \times X \times A, u, \mathcal{H}) \to (\{*\} \times A, t', \mathcal{G}') \end{aligned}$$

$$e_1 : A \times X \times A \to \{*\} \times A \quad e \quad e_2 : \mathcal{G}' \to \mathcal{H}.$$

Onde $(\{*\} \times A, t', \mathcal{G}') \cong (A \times \{*\}, t, \mathcal{G})$ como já visto anteriormente.

Deste modo, a composta $(\epsilon_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{A}}) \circ \alpha_{\mathcal{A},\mathcal{A}^{\perp},\mathcal{A}} \circ (1_{\mathcal{A}} \otimes \eta_{\mathcal{A}}) \circ \rho_{\mathcal{A}}$ é dada por:

$$(e_1, e_2) \circ (\alpha_1 \circ d_1 \circ f, g \circ d_2 \circ \alpha_2) = (e_1 \circ \alpha_1 \circ d_1 \circ f, g \circ d_2 \circ \alpha_2 \circ e_2).$$

Esta composta é por si só um par adjunto pois para todo $a \in A$ e $\mathbf{g}' \in \mathcal{G}'$ temos que:

$$t'(\epsilon_1 \circ \alpha_1 \circ d_1 \circ f(a), \mathbf{g}') = u(f(a), \epsilon_2(\mathbf{g}')) = r(a, g \circ d_2 \circ \alpha_2 \circ \epsilon_2(\mathbf{g}')).$$

Finalmente, vamos concluir o ultimo isomorfismo da equação 1. Tal isomorfismo natural condiz ao par:

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathcal{A}}^{-1} = (h_1, h_2) &: \quad 1 \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A} \\ &: \quad (\{*\} \times A, t', \mathcal{G}') \to (A, r, X) \end{aligned}$$

$$h_1 : \{*\} \times A \to A \quad e \quad h_2 : X \to \mathcal{G}'$$

Portanto, a composta da equação 1, $\lambda_{\mathcal{A}}^{-1} \circ (\epsilon_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{A}}) \circ \alpha_{\mathcal{A},\mathcal{A}^{\perp},\mathcal{A}} \circ (1_{\mathcal{A}} \otimes \eta_{\mathcal{A}}) \circ \rho_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{A}}$ é dada por:

$$\begin{aligned} (h_1, h_2) \circ (e_1 \circ \alpha_1 \circ d_1 \circ f, g \circ d_2 \circ \alpha_2 \circ e_2) &= (h_1 \circ e_1 \circ \alpha_1 \circ d_1 \circ f, g \circ d_2 \circ \alpha_2 \circ e_2 \circ h_2) \\ &= (1_A : A \to A, 1_X : X \to X) \\ &= 1_{\mathcal{A}}. \end{aligned}$$

■

Definição 8.1. *Uma categoria $*-$ autônomas é uma categoria monoidal simétrica equipada com um objeto dualizador $\perp$.*

Exemplo 8.1. *Observe que Chu_K é uma categoria $*-$ autônomas com o próprio dual do espaço de Chu $\mathcal{A}^{\perp}$ como o objeto dual do espaço $\mathcal{A}$ e o objeto dualizador definido como $\perp = \mathbf{1}^{\perp}$.*

8.3 Chu_K : Tensor Clássico

Vimos na seção 7.2 que os tensores clássicos não são compactos, em vez disso eles vêm com a estrutura de Categorias Cartesianas. Assim, para a categoria dos espaços de Chu vamos considerar a soma direta $\oplus$.

Teorema 8.3. *Chu_K é uma categoria cartesiana com respeito a soma direta $\oplus$.*

Prova. Sejam $\mathcal{A} = (A, r, X), \mathcal{B} = (B, s, Y)$ e $\mathcal{C} = (C, t, Z)$ objetos na categoria Chu_K. Considere a soma direta $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = (A + B, u, X \times Y)$ visto como o produto cujas as projeções sejam:

$$\pi_1 : \mathcal{A} \oplus \mathcal{B} \to \mathcal{A} \quad e \quad \pi_2 : \mathcal{A} \oplus \mathcal{B} \to \mathcal{B}.$$

Sabendo que ambas a projeções correspondem respectivamente aos pares de morfismos:

- $\pi_1 : (\pi_1', \pi_1'') := (A + B \to A, X \to X \times Y)$;
- $\pi_2 : (\pi_2', \pi_2'') := (A + B \to B, Y \to X \times Y)$;

onde para qualquer objeto $\mathcal{C} \in Chu_K$, e qualquer par de morfismos $g : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ e $h : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$, existe um único morfismo $f : \mathcal{C} \to \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ tal que

$$g = \pi_1 \circ f \quad e \quad h = \pi_2 \circ f.$$

De fato, temos que g e h correspondem aos pares de morfismos:

- $g : (g_1, g_2) := (C \to A, X \to Z)$;
- $h : (h_1, h_2) := (C \to B, Y \to Z)$.

E f ao par $(f_1, f_2) := (C \to A + B, X \times Y \to Z)$. Assim, temos que:

- $\pi_1 \circ f = (\pi_1' \circ f_1, f_2 \circ \pi_1'') = (C \to A, X \to Z) = g$;
- $\pi_2 \circ f = (\pi_2' \circ f_1, f_2 \circ \pi_2'') = (C \to B, Y \to Z) = h$.

Além disso, f é único! De fato, suponha que exista f^* de modo que $f^* : \mathcal{C} \to \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$, assim

$$\pi_1 \circ f^* = g = \pi_1 \circ f \quad e \quad \pi_2 \circ f^* = h = \pi_2 \circ f$$

$$\therefore f^* = f.$$

■

8.4 Chu_K : Operação de cópia e exclusão - Comonóides

Comonóides em Chu têm a vantagem de ter uma definição elementar simples em termos apenas de conjuntos e funções, independentes de Chu. Além disso, veremos adiante, comonóides sobre Chu_2 têm a riqueza dos espaços topológicos.

Os resultados e definições nesta seção forma retirados das notas de curso (PRATT, 2003a) e do artigo (PRATT, 1999), com a adição de mais exemplos com o propósito de ajudar o leitor.

Definição 8.2. *Um **comonóide** em Chu_K é um espaço de Chu $\mathcal{A}$ para o qual a função diagonal $\delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ e a função constante $\epsilon : \mathcal{A} \to \mathbf{1}$ são* contínuas *(definição 4.4) onde $\mathbf{1}$ é a unidade do produto tensorial. Estas duas funções constituem a interpretação das operações de cópia e exclusão, respectivamente.*

Assim, δ e ϵ são morfismos em Chu satisfazendo as equações de co-multiplicação e co-unidade.

O comonóide gerado por um espaço de Chu normal $\mathcal{A} = (A, X)$ é definido como o comonóide normal que tem o menor $Y \supseteq X$. Este Y existe e é um corolário do seguinte lema.

Lema 8.1. *Dado qualquer família de comonóides (A, X_i) com A fixo, $(A, \bigcap_i X_i)$ é um comonóide.*

Prova. A única função de (A, X) para $\mathbf{1}$ é contínua apenas quando X inclui todas as funções constantes. Todos os $X_i's$ devem ter esta propriedade e, portanto, o mesmo acontece com a sua interseção. Dado $\mathcal{A} = (A, X)$, $\delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ é contínua apenas quando cada $A \times A$ é "solução de palavras cruzadas com dicionário X que tem como diagonal principal uma palavra de X". Assim, se uma solução usa palavras encontradas em cada dicionário X_i, então a diagonal é encontrada em cada X_i. Daí $\bigcap_i X_i$ possui a mesma propriedade. Portanto, $(A, \bigcap_i X_i)$ é um comonóide.

■

Vamos agora dar uma abordagem do que vem a ser comonóides sobre $K = 2$. Felizmente há uma definição inteiramente fundamental que veremos a seguir, abordada pelo Pratt (2003a) (PRATT, 2003a). Mais adiante veremos a conexão desta definição com a noção categórica de comonóide.

Definição 8.3. *Um comonóide $A = (A, X)$ é um conjunto A, juntamente com um conjunto X de subconjuntos de A com as duas seguintes propriedades:*

1. *X contém A e o conjunto vazio.*

2. *Seja C qualquer matriz $A \times A$ de $0's$ e $1's$ tal que para todos os $a \in A$, se X contém $C[a]$ e $C^{-1}[a]$, então X também contém a diagonal.*

Podemos interpretar esta definição do seguinte modo: se tomarmos A como o conjunto de posições para as letras de uma palavra, então X pode ser visto como um dicionário de palavras sobre o alfabeto $\{0, 1\}$, todos de mesmo comprimento, ou seja, $|A|$. Qualquer palavra representa o subconjunto de A que consiste dessas posições em que o 1 aparece.

Intuitivamente, a condição 1 exige que ambas as palavras constantes, 00...0 e 11...1, estejam no dicionário.

A condição 2 pode ser compreendida pela relação C como palavras cruzadas com quadrados todos preenchidos. A premissa da condição é que cada linha e cada coluna de C devem aparecer no dicionário, a condição de palavras cruzadas padrão. A condição em si diz que a diagonal principal de tais palavras cruzadas também deve aparecer no dicionário.

Definição 8.4. *Um morfismo $f : (A, X) \to (A', X')$ de comonóides é a função $f : A \to A'$ tal que para todo $Y \in X'$, a imagem inversa $f^{-1}(Y) \in X$.*

Exemplo 8.2. *Vamos considerar um exemplo simples em Chu_2, seguido da definição 8.3 de comonóide do Pratt (2003a). Seja o espaço de Chu $\boldsymbol{2} = \boldsymbol{1} \oplus \boldsymbol{1} = (A = 2, X = 2^A) =$ $\boxed{\begin{matrix} 0011 \\ 0101 \end{matrix}}$. Observe que 00 e 11 estão em X o que satisfaz a condição 1. Agora para a condição 2, são dadas as seguintes matrizes $A \times A$:*

$$\boxed{\begin{matrix} 00 \\ 00 \end{matrix}} \; \boxed{\begin{matrix} 00 \\ 01 \end{matrix}} \; \boxed{\begin{matrix} 00 \\ 10 \end{matrix}} \; \boxed{\begin{matrix} 00 \\ 11 \end{matrix}} \; \boxed{\begin{matrix} 01 \\ 00 \end{matrix}} \; \boxed{\begin{matrix} 01 \\ 01 \end{matrix}} \; \boxed{\begin{matrix} 01 \\ 10 \end{matrix}} \; \boxed{\begin{matrix} 01 \\ 11 \end{matrix}}$$
$$\boxed{\begin{matrix} 10 \\ 00 \end{matrix}} \; \boxed{\begin{matrix} 10 \\ 01 \end{matrix}} \; \boxed{\begin{matrix} 10 \\ 10 \end{matrix}} \; \boxed{\begin{matrix} 10 \\ 11 \end{matrix}} \; \boxed{\begin{matrix} 11 \\ 00 \end{matrix}} \; \boxed{\begin{matrix} 11 \\ 01 \end{matrix}} \; \boxed{\begin{matrix} 11 \\ 10 \end{matrix}} \; \boxed{\begin{matrix} 11 \\ 11 \end{matrix}}$$

Observe que para toda matriz $A \times A$ em $\boldsymbol{2}$, temos que se X contém $C[a]$ e $C^{-1}[a]$, então X também contém a diagonal. Isto é obvio visto que $\boldsymbol{2}$ é um espaço discreto, ou seja, $X = 2^A$. Portanto, temos que $\boldsymbol{2}$ é um comonóide em Chu_2.

Exemplo 8.3. *Considere o espaço de Chu $\mathcal{A} =$ $\boxed{\begin{matrix} 001 \\ 010 \end{matrix}}$. Note que para este espaço a condição 1 ja não é satisfeita, visto que contém apenas o conjunto vazio (00) e não contém A (11). Considerando o conjunto das 16 matrizes $A \times A$ visto no exemplos anterior, da* *seguinte matriz* $\boxed{\begin{matrix} 10 \\ 01 \end{matrix}}$ *temos que* X *contém* $C[a]$ *e* $C^{-1}[a]$, *contudo a diagonal principal 11 não está em* X. *Desse modo,* $\mathcal{A}$ *não é um comonóide.*

Podemos definir Com_K como a categoria de comonóides em Chu_K, ou equivalente, como vimos acima, como dicionários D para que qualquer palavras cruzadas sobre D tem a sua diagonal principal em D. Com_2 se assemelha a **Top**, categoria dos espaços topológicos ordinário. A noção de um espaço biextensional de Chu pode ser entendida por analogia ao do espaço topológico T_0, ou seja, como um conjunto A, juntamente com um conjunto X de subconjuntos de A, o que podemos considerar como conjunto de abertos.

Pela definição 8.3, podemos ver a semelhança de comonóides com espaços topológicos da seguinte forma, em comparação as condições 1 e 2 :

1. é tradicionalmente mantido explicitamente para espaços topológicos, visto que, a imagem inversa de um vazio deve estar vazio, enquanto a imagem inversa de um aberto deve ser todo o aberto.
2. esta condição é substituída pelo requisito de que X é fechado sob união arbitrária e interseção finita.

Com esta analogia, vamos considerar os elementos de A como pontos e os elementos de X como conjuntos abertos.

Definição 8.5. *Uma* ***ordem de especialização*** *de uma estrutura* (A, X) *é uma préordenação* $\leq$ *definida por* $a \leq b$ *apenas quando cada conjunto aberto contendo a também contém* b; *equivalentemente, quando* $cl\{a\} \subseteq cl\{b\}$, *onde* $cl\{a\}$ *denota o fechamento do conjunto fechado minimal contendo o conjunto unitário* $\{a\}$.
A ***topologia Alexandroff*** *sobre um conjunto pré-ordanado* $(A, \leq)$ *tem para os seus conjuntos abertos os filtros de ordem do conjunto pre-ordenado, de forma equivalente as funções monótonas de* $(A, \leq)$ *para a cadeia* $0 < 1$.

Esta topologia é claramente fechada sob união arbitrária e interseção arbitrária. De fato, dado um espaço topológico de Alexandroff (X, τ), cada $x \in X$ tem a menor vizinhança definida como se segue:

$$\nabla(x) = \bigcap\{A \in \tau : x \in A\}.$$

A topologia Alexandroff é realmente a maior especialização topologia induzida por $\leq$. Nesta topologia os seguintes conjuntos: $\nabla'(x) = \{y \in X : x \leq y\}$ para todo $x \in X$ forma uma sub-base.

Um exemplo interessante de comonóide em Chu_2 visto como espaço Topológico segue da seguinte proposição.

Proposição 8.1. *A topologia Alexandroff em um poset é um comonóide.*

Prova. Para cada a seja m^a a interseção de todos os conjuntos abertos contendo a, e seja $f : \mathcal{A}^2 \to \mathbf{2}$ uma função contínua separadamente em cada argumento, e $B = \{a | f(a, a) = 1\}$. Para a continuidade conjunta de f basta mostrar que B é aberto.

Seja $C = \bigcup_{a \in B} m^a$, uma união de interseções de conjuntos abertos e, portanto, aberto. É obvio que $B \subseteq C$, assim para mostrar que B é aberto, basta mostrar que $C \subseteq B$. Suponha $c \in C$, então para algum $a \in B$, $c \in m^a$. Por isso, cada conjunto aberto contendo a também deve conter c. Assim, para qualquer função contínua $g : \mathcal{A} \to \mathbf{2}$, temos $g(a) \leq g(c)$. Logo, $f(a, a) \leq f(a, c) \leq f(c, c)$. Daí, temos que para $a \in B$, $f(a, a) = 1$, então $f(c, c) = 1$, $c \in B$. ■

Observe que Posets são feito espaços topológicos com a topologia Alexandroff.

No ponto de vista categórico, os morfismos são definido como se fossem funções contínuas, assim a função $f : \mathcal{A}^2 \to \mathbf{2}$ é um morfismo (em Chu_2) cuja imagem de cada elemento em f^{-1} é um elemento em X (para $\mathcal{A} = (A, X)$). Neste caso, f é vista como a imagem inversa δ^{-1} no qual mapeia qualquer aberto de $\mathcal{A}^2$ para um aberto em $\mathbf{2}$. Ou seja, o conjunto para os quais $f(a, a)$ estão em $\mathbf{2}$.

Além disso, a topologia Alexandroff é fechada sob união arbitrária e interseção arbitrária, o que satisfaz a condição 2 da definição 8.3. E, pela proposição 8.1, a continuidade de δ é dada pela de f. Para este exemplo, como definido o funtor $\dagger$ em Chu, temos $\delta^\dagger = \delta^{-1} = f$. Para o morfismmo ϵ, temos que a imagem inversa de um conjunto vazio é vazio, assim também para um aberto (cuja imagem inversa também é aberto) e assim, $\epsilon^\dagger = \epsilon^{-1}$, visto que a topologia Alexandroff em um poset é um comonóide.

Agora vamos descrever a conexão da definição do Pratt vista em 8.3 com a definição categórica $\epsilon : \mathcal{A} \to I$ e $\delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$. Onde o *delta* é o mapa diagonal ($\delta(a) = (a, a)$) e o ϵ é o mapa constante ($\epsilon(a) = *$).

Os morfismo de Chu são definidos como se fossem funções contínuas: uma função de (A, X) para (B, Y) é um morfismo de Chu apenas quando a imagem inversa de cada elemento de Y sob f^{-1} é um elemento de X. Assim,

1. A imagem inversa de um conjunto vazio deve estar vazio, enquanto a imagem inversa de todo o espaço deve ser todo o espaço. Uma vez que estes são os únicos conjuntos

em I (1), segue-se que $\mathcal{A}$ deve ter o conjunto vazio e o espaço inteiro (o conjunto A) entre seus conjuntos.

2. A imagem inversa δ^{-1} deve mapear qualquer conjunto y de $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$ para um conjunto de $\mathcal{A}$. Mas isso equivale a recolher do conjunto dos $a's$ para qual $f(a,a)\in y$. Uma vez que y é uma palavra cruzada tendo linhas e colunas retiradas dos conjuntos de $\mathcal{A}$, pela definição do produto tensorial $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$, isso equivale a exigir que a diagonal destas palavras cruzadas, como uma função de A para 2, seja um conjunto de $\mathcal{A}$.

8.5 O funtor † sobre Chu_K

Recentemente, muitos trabalhos voltados para a mecânica quântica categórica têm dado muita importância ao funtor *dagger* (†) desenvolvendo a ideia de que a mecânica quântica pode ser expressa, em uma categoria simétrica monoidal, utilizando apenas o funtor † para recuperar as estruras essneciais da mecânuca quântica tais como base, emanranhamento, etc. Categorias com uma estrutura mais sofisticada, as *categorias monoidais simétricas dagger* (†−SMC), foram abordadas no capítulo 6 (definição 6.5).

Neste contexto, surge o interesse de investigar nossa categoria Chu_K a ponto de obtermos tal funtor e, se ele a faz uma †−SMC. Contudo, essa tarefa não se mostrou tão trivial como pareceu iniciaslmente.

Inicialmente obervemos que para definir um funtor *dagger* com a identidade em objetos ele teria que satisfazer a seguinte propriedade. Sejam $\mathcal{A}=(A,r,X)$ e $\mathcal{B}=(B,s,Y)$ espaços de Chu. Dado o morfismo

$$f=(f_1,f_2):\mathcal{A}\to\mathcal{B}$$

com $f_1:A\to B$ e $f_2:Y\to X$ tal que $s(f_1(a),y)=r(a,f_2(y))$. o morfismo adjunto

$$f^\dagger=(f_1^\dagger,f_2^\dagger):\mathcal{B}\to\mathcal{A}$$

onde $f_1^\dagger:B\to A$ e $f_2^\dagger:X\to Y$ deve satisfazer $s(b,f_2^\dagger(x))=r(f_1^\dagger(b),x)$.

Observemos que esta propriedade está relacionada com a funtorialidade do candidato a † e usa continuidade. O problema é encontrar uma estrutura que satisfaça e que seja consistente com o resto da teoria e com os modelos.

O primeiro candidato a solução é definir, tal como em espaços Vetoriais, o † de um operador através da noção de transposta do operador. Notemos que, se particularizarmos para espaços biextensionais, dada uma função $f:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$, podemos representá-la como uma matriz m, $A\times Y$ sobre K, qual seja $m(a,y)=s(f(a),y)$. Tomando a linha $s(f(a),-)$

como a representação em $\mathcal{B}$ de $f(a)$, esta representação de f é simplesmente uma listagem das representações em $\mathcal{B}$ dos valores de f nos pontos de A.

Querendo obter o dagger através da matriz transposta $Y \times A$ sobre K, que representa a função dual $g : \mathcal{B}^{\perp} \to \mathcal{A}^{\perp}$, ou seja, $m(y, a) = r(a, g(y))$, não obtemos sucesso. Visto que não conseguimos conectar as condições $s(b, f_2^{\dagger}(x)) = r(f_1^{\dagger}(b), x)$ para a matriz transposta pois para tais espaços temos uma caracterização alternativa de continuidade: a função é contínua apenas quando o converso (transposição) da sua representação é uma função de $\mathcal{B}^{\perp}$ para $\mathcal{A}^{\perp}$.

De fato, a função dual $g : \mathcal{B}^{\perp} \to \mathcal{A}^{\perp}$ altera tanto o sentido do morfismo quanto a estrutura interna dos espaços de Chu, de modo que existe a correspondência do par de morfismo $g : (h_1, h_2) : \mathcal{B}^{\perp} \to \mathcal{A}^{\perp}$ com $h_1 : Y \to X$ e $h_2 : A \to B$ com os de $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

Investigamos outras alternativas, óbvias a primeira vista, de possíveis soluções, algumas das quais foram imediatamente descartadas por não levarem a resultados satisfatórios enquanto outras deixaremos para trabalhos futuros, dado a complexidade envolvida:

1. Relacionar o funtor conjugado $\dagger$ ao funtor dual $\perp$.

    a) Fazendo $\mathcal{A}^{\dagger} = \mathcal{A}^{\perp}$. Esta possibilidade é descartada de imediato! Pelo simples fato de que nas estruturas categóricas eles diferirem em geral. O funtor dagger (usado para categorias $\dagger-$SMC) é um a estrutura adicional àquelas que contém o objeto dual (as categorias compactas fechadas). Vimos que na categoria Chu_K esse objeto dual corresponde a transposta $\mathcal{A}^{\perp}$. E $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^{\perp}$ são sequer isomorfos em geral.

    b) Fazendo com que $\dagger$ seja identidade nos objetos, como requerido em sua definição original, mas nos morfismos haja como o $\perp$. Esta possibilidade é também descartada de imediato! Como $\perp$ age nos objetos invertendo os papéis das linhas e colunas, ele funciona nos morfismo usando tal troca, mas se mantivermos os objetos como estão, trocar os morfismos leva a incoerência trivial onde os domínios das funções envolvidas nao correspndem ao que deveriam ser.

    c) Obter o *dagger* através do dual através de uma expressão mais sofisticada do que as usadas acima. Não descartamos esta alternativa, mas observando o argumento acima levando em consideração os espaços biextensionais, não criamos muita expectativa em seguir por este caminho.

2. Olhar para o espaço de Chu em si. Assim como uma $\dagger-$SMC é uma categoria com estruturas, podemos definir um $\dagger-$Chu, um espaço de Chu com a estrutura dagger adicional. Ou seja, dado um espaço de Chu biextensional $\mathcal{A} = (A\langle\_, \_\rangle, X)$ sobre um

corpo K (como foi abordado no capitulo 5), onde o conjunto X são funções lineares de A para K, essa abordagem relaciona o X como o dual de A, logo, definiríamos um *dagger* em A.

- Um caminho interessante! Porém, não conseguimos a funtorialidade trabalhando apenas com os componentes dos objetos. Seria preciso estender esta noção aos morfismo, caindo nos mesmo problemas do item 1.

3. *Enfraquecer* ou até mesmo retirar a condição de *identidade em objetos* ($A\dagger = A$) imposta na estrutura monoidal dagger.

    - Esta é alternativa de maior motivação! Requer um estudo mais aprofundado, podendo levar meses para obtenção de um (possível) resultado positivo. Pretendemos investigar esta alternativa em trabalhos futuros, como por exemplo um estudo inicial no doutorado, uma vez que teremos de reconstruir todo o trabalho feito em $\dagger-$SMC.

Vimos na Seção 7.3, que estruturas de base constitui uma parte essencial de qualquer categoria quântica, na abordagem de Coecke e Pavlovic (2007) e que vários autores axiomatizam a Mecânica Quântica usando categorias compactas fechadas *dagger*.

Coecke e Pavlovic (2007) apontam que a definição de estruturas complementares em **FdHilb** coincide com a mecânica quântica padrão e uma caracterização algébrica equivalente de observáveis complementares é fornecido pelo seguinte teorema:

Teorema 8.4 ((COECKE; PAVLOVIC, 2007))**.** *Em uma categoria com pontos suficientes cada par de estruturas de bases complementares formam uma (em escala) álgebra Hopf com antípoda trivial.*

Coecke e Pavlovic (2007) prosseguem para mostrar que esta definição abstrata capta a maior parte do comportamento de observáveis complementares em sistemas da Mecânica Quântica (COECKE; PAVLOVIC, 2007).

Contudo, nossa categoria Chu_K tem limitações nesses aspectos. Pois a categoria dos espaços de Chu não possui, ainda, estrutura de uma $\dagger-$SMC, com isso não obtemos estruturas de base.

O problema, como vimos, se encontra em definir um funtor contravariante involutivo

$$\dagger : Chu_K^{OP} \to Chu_K.$$

Não há na literatura um funtor em Chu_K com as características do funtor $\dagger$.

Isto pode parecer um problema muito sério que compromete o uso de espaços de Chu como modelos de categorias quânticas, porém, o uso de Teoria das Categorias em Mecânica Quântica é anterior a linha adotada em (COECKE; PAVLOVIC, 2007). Por exemplo, (DAY; STREET, 2004) propõe o uso de *comonad monoidais*. Em (STREET, 2004) propoe o uso de *monadas de Frobenius* e pseudomonoides. Todas baseadas em categoria monoidais, como é Chu_K. Um pequeno artigo, (DAY, 2006) com exemplos destas estruturas é recomendado. Para uma introdução mais elementar a esta parte da área Mecânica Quântica Categórica sugerimos a leitura do livro (STREET, 2007). Não desenvolvemos esta linha aqui por ser muito mais complexa e geral com aplicações em Teoria de Campos Quânticos Topológicos (ver por exemplo (KOCK, 2004) e (KERLER; LYUBASHENKO, 2001)). Há muito que explorar e é o que pretendemos na continuação deste trabalho no doutorado.

9 Conclusão

Vamos voltar à nossa analogia do uso de teoria das categorias como um guia onde a Mecânica Quântica pode viver no mundo fora da matemática do espaço de Hilbert. Onde é que Espaço de Chu se encaixa em nosso novo mundo para a computação quântica? Ele tem muitos aspectos interessantes. Neste trabalho mostramos que possui os recursos iniciais necessários (estrutura compacta) para executar protocolos como o teletransporte quântico. Certamente poderíamos imaginar, para trabalhos futuros, o Espaço de Chu sobre um corpo $\mathbb{K}$ podendo ser um novo lar para algumas áreas da computação quântica. Espero que, pelo menos, isso nos ajude a chegar a uma melhor compreensão da computação quântica.

Recentemente muitos trabalhos voltados à Teoria Quântica Categórica têm dado importância ao funtor *dagger* (†) e através das categorias monoidais simétricas *dagger* construiu-se uma estrutura de base a partir da álgebra de Frobenius, onde consegue descrever características da Mecânica Quântica. Isso é surpreendente, uma vez que **FdHilb** é uma categoria com estruturas de base.

O estudo das álgebras de Frobenius para os espaços de Chu é de grande interesse, visto que apesar de não termos (ainda) um estrutura categórica equipada com o funtor † em Chu_K, podemos ver uma ligação entre as possíveis estruturas de base em Chu e as estruturas de base de **FdHilb**, devido as semelhanças na aritmética matricial e o conceito de Chu como uma generalização da álgebra linear.

Neste contexto, vale salientar o problema da ausência do funtor *dagger* em nossa estrutura categórica que pretendemos solucionar em nossos trabalhos futuros, no qual somos motivados pelo fato que a categoria dos espaços de Chu mostrou-se equipada com a estrutura adequada para trabalharmos propriedades da Mecânica Quântica (*Categoria Compacta*). Nestes estudos iniciais, analisamos que seria interessante ver a possibilidade de simularmos os mesmos protocolos e propriedades quânticas que foram realizadas em **FdHilb** e utilizarmos para Chu_K, com $\mathbb{K}$ corpo.

Além disso, uma das características mais importantes do uso de categorias na Teoria Quântica é que os sistemas e processos que encontramos podem ser representados em um cálculo puramente esquemático, conhecido como *cálculo gráfico*. Isto significa que as situações que podem parecer extremamente complicadas e, no primeiro olhar, não interpretáveis na forma de equações, agora tornaram-se muito intuitivas e fáceis de ler.

Tal linguagem gráfica é vista por muitos autores como a característica mais poderosa das categorias monoidais simétricas. Inicialmente não nos voltamos para esta área, não obstante é de interesse particular representar o cálculo gráfico à categoria Chu_K.

Referências Bibliográficas

ABRAMSKY, S.; COECKE, B. A categorical semantics of quantum protocols. **In: Proceedings of 19th IEEE conference on Logic in Computer Science**, p. 415–425., 2004. Disponível em: <arXiv:quantph/0402130>.

ABRAMSKY, S.; TZEVELEKOS, N. **Introduction to Categories and Categorical Logic**. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.

AWODEY., S. **Category Theory**. [S.l.]: Oxford University press, 2010.

BAEZ, J.; STAY, M. Physics, topology, logic and computation: A rosetta stone. **Lect. Notes Phys**, v. 813, p. 95–172, 2011.

BAEZ, J. C. Quantum quandaries: a category-theoretic perspective. In: The Structural Foundations of Quantum Gravity, D. Rickles, S. French and J. T. Saatsi (Eds), p. 240–266, 2006. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0404040>.

BARR, M. ***-Autonomous categories with an Appendix by Po-Hsiang Chu**. [S.l.: s.n.], 1979.

BARR, M. The separated extensional Chu category. **Theory and Applications of Categories**, v. 4, n. 6, p. 137–147, 1998.

BARR, M.; WELLS, C. **: Category Theory for Computing Science**. [S.l.]: 3rd edn, 1999.

BARWISE, J.; SELIGMAN, J. **Information ow: the logic of distributed systems**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1997.

BENTHEM, J. van. Information transfer across Chu spaces. **Logic Journal of the IGPL**, v. 8, n. 6, 2000.

BLASS, A. The interaction between category theory and set theory. **Contemporary Mathematics**, v. 30, 1984.

BLUTE, R.; SCOTT, P. Category theory for linear logicians. **In: Linear Logic in Computer Science, T. Ehrhard, J. -Y. Girard, P. Ruet and Ph. Scott, pp. 3–64, London Mathematical Society Lecture Note Series**, v. 316, p. 3–64, 2004.

BORCEUX, F. **: Handbook of Categorical Algebra (Encyclopedia of Mathematics and its Applications)**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1994.

CHU, P.-H. **Constructing *-autonomous categories**. of Lecture Notes in Mathematics: *-Autonomous categories (Michael Barr), 1979. 103–137 p.

COECKE, B. Introducing categories to the practicing physicist. In: **What is Category Theory?** [S.l.: s.n.], 2006. v. 1032, p. 45–74.

COECKE, B. **New Structures for Physics**. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.

COECKE, B.; DUNCAN, R. W. Interacting quantum observables. **In: Proceedings of the 35th International Colloquium on Automata, Languages and Programming**, v. 5126, p. 298–310, 2008.

COECKE, B.; EDWARDS, B. Toy quantum categories (arXiv:0808. **Electronic Notes in Theoretical Computer Science**, 2008.

COECKE, B.; PAQUETTE, E. O.; PAVLOVIC, D. **Classical structures and quantum structures**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2008.

COECKE, B.; PAVLOVIC, D. **Quantum measurements without sums**. [S.l.]: In: Mathematics of Quantum Computing and Technology, G, 2007. 567–604 p.

DAY, B. *-autonomous categories in quantum theory. **arXiv preprint math/0605037**, 2006.

DAY, B.; STREET, R. Quantum categories, star autonomy, and quantum groupoids. In: CITESEER. **in"Galois Theory, Hopf Algebras, and Semiabelian Categories", Fields Institute Communications 43 (American Math. Soc**. [S.l.], 2004.

DEVARAJAN, H. et al. Full completeness of the multiplicative linear logic of Chu spaces. In: **LICS**. [S.l.: s.n.], 1999. p. 234–242.

EILENBERG, S.; LANE, M. **General theory of natural equivalences**. [S.l.]: Transactions of the American Mathematical Society, 1945.

GIRARD, J.-Y. Linear logic. **Theor. Comput. Sci. (TCS)**, v. 50, p. 1–102, 1987.

GIULI, E.; THOLEN, W. A topologist's view of Chu spaces. **Applied Categorical Structures**, 2007.

GUPTA, V. **Chu Spaces: A Model of Concurrency**. PhD thesis, Stanford University, 1994. Disponível em: <ftp://boole.stanford.edu/pub/gupthes.ps.Z>.

HANUS, M. Curry: An integrated functional logic language. **(vers 0. 8.8)**, 2012. Disponível em: <http://www.curry-language.org>.

KERLER, T.; LYUBASHENKO, V. V. **Non-semisimple topological quantum field theories for 3-manifolds with corners**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2001.

KOCK, J. **Frobenius algebras and 2-d topological quantum field theories**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004.

KRIPKE, S. Semantical analysis of modal logic. **Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik**, v. 9, p. 67–96, 1963.

LAFONT, Y.; STREICHER, T. Games semantics for linear logic. In: **Proc**. [S.l.: s.n.], 1991. p. 43–49.

LAMBEK, J.; SCOTT, P. **: Introduction to Higher-Order Categorical Logic**. [S.l.]: Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

MACLANE, S. **Categories for the Working Mathematician**. [S.l.]: 2nd edition. Springer-Verlag, 1998.

MAKKAI, M.; REYES, G. . F.-O. C. L. **LNM 611, Springer**. [S.l.: s.n.], 1977.

MANCHESTER, M. The Yoneda Lemma and representable functors. Disponível em: <http://www.maths.manchester.ac.uk/raag/zusatz/tex/math/ALGEBRA/category-.pdf>.

MENDELSON, E. **Álgebra booleana e circuitos de chaveamento**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1977.

NGUYEN, N. et al. Chu spaces: Towards new foundations for fuzzy logic and fuzzy control. **with applications to information ow on the world wide web. JACIII**, v. 5, n. 3, p. 149–156, 2001.

OOSTEN, J. van. **Basic Category Theory**. [S.l.]: Utrecht University, 2002.

PIERCE, B. C. **A taste of category theory for computer scientists**. Carnegie Mellon University, 1988. Disponível em: <http://repository.cmu.edu/cgi/viewcontent-.cgi?article=2846\context=compsci>.

PIERCE, B. C. **Basic Category Theory for Computer Scientists (Foundations of Computing)**. [S.l.]: August 7, 1991.

PRATT, V. The Stone gamut: A coordinatization of mathematics. In: **Logic in Computer Science**. [S.l.]: IEEE Computer Society, 1995. p. 444–454.

PRATT, V. Chu spaces from the representational viewpoint. In: **Parikh Festschrift**. [S.l.: s.n.], 1997.

PRATT, V. Chu spaces as a semantic bridge between linear logic and mathematics. **TCS**, v. 294, n. 3, p. 439–471, fev. 2003.

PRATT, V. **Puzzle 1**. 5, 2003. Disponível em: <http://thue.stanford.edu/puzzle.html>.

PRATT, V. R. **Chu spaces: Notes for school on category theory and applications**. [S.l.], 1999. Disponível em: <http://boole.stanford.edu/pub/coimbra.ps.gz>.

PRATT, V. R. Comonoids in chu: a large Cartesian closed sibling of topological spaces. **12 pp. (electronic), in CMCS'03: Coalgebraic Methods in Computer Science, Proceedings of the 6th Workshop held in Warsaw**, Coalgebraic Methods in Computer Science, in CMCS'03, v. 82, n. 1, p. (electronic, 2003. Disponível em: <http://boole.stanford.edu/pub/comonoids.pdf>.

PRATT, V. R. Transition and cancellation in concurrency and branching time. **Mathematical Structures in Computer Science**, v. 13, n. 4, p. 485–529, 2003.

SCHRöDINGER, E. : Discussion of probability relations between separated systems. **Proc. Cambridge Philosophical Soc**, v. 31., p. 555 – 563, 1935.

SEELY, R. A. G. Linear logic, *-autonomous categories and cofree coalgebras. In: **Categories in Computer Science and Logic**. [S.l.: s.n.], 1989. v. 92, p. 371–382.

SHULMAN, M. A. Set theory for category theory. **Cornell University Library**, v. 7, out. 2008. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/0810.1279>.

SPEKKENS, R. Evidence for the epistemic view of quantum states: A toy theory. **Physical Review A 75**, 2007.

STREET, R. Frobenius monads and pseudomonoids. **Journal of mathematical physics**, AIP Publishing, v. 45, n. 10, p. 3930–3948, 2004.

STREET, R. **Quantum Groups: a path to current algebra**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007.

VANNUCCI, S. **On game formats and Chu spaces**. [S.l.]: Department of Economics University of Siena 417, Department of Economics, University of Siena, 2004.