

**Rafael Marques do Nascimento**

**Diferenciação Numérica de Dados Experimentais Aplicado em  
Estudos de Crescimento de Peixes**

RECIFE - JULHO/2015

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA

**Diferenciação Numérica de Dados Experimentais Aplicado em  
Estudos de Crescimento de Peixes**

Dissertação apresentada ao Programa de  
Pós-Graduação em Biometria e Estatística  
Aplicada como exigência parcial à obtenção  
do título de Mestre.

**Área de Concentração: Biometria e Estatística Aplicada**

Orientador: Prof. Dr. Aduino José Ferreira de Souza

Co-orientador: Prof. Dr. Paulo José Duarte Neto

RECIFE - JULHO/2015.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA

**Diferenciação Numérica de Dados Experimentais Aplicado em Estudos de  
Crescimento de Peixes**

Rafael Marques do Nascimento

Dissertação julgada adequada para obtenção do título de mestre em Biometria e Estatística Aplicada, defendida e aprovada por unanimidade em 30/07/2015 pela Comissão Examinadora.

Orientador:

---

Prof. Dr. Aduino José Ferreira de Souza

Departamento de Física - UFRPE

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Francisco Marcante Santana da Silva

Unidade Acadêmica de Serra Talhada - UFRPE

---

Prof. Dr. Kleber Regis Santoro

Unidade Acadêmica de Garanhuns - UFRPE

---

Prof. Dr. Paulo José Duarte Neto

Departamento de Estatística e Informática - UFRPE

*Dedico este trabalho à minha família,  
que mesmo distante permanecemos unidos pelo nosso amor.*

## INVICTO

Da noite escura que me cobre,  
Como uma cova de lado a lado,  
Agradeço a todos os deuses  
A minha alma invencível.

Nas garras ardis das circunstâncias,  
Não titubeei e sequer chorei.  
Sob os golpes do infortúnio  
Minha cabeça sangra, ainda erguida.

Além deste vale de ira e lágrimas,  
Assoma-se o horror das sombras,  
E apesar dos anos ameaçadores,  
Encontram-me sempre destemido.

Não importa quão estreita a passagem,  
Quantas punições ainda sofrerei,  
Sou o senhor do meu destino,  
E o condutor da minha alma.

*(William Ernest Henley)*

## Agradecimentos

Agradeço ao Professor Aduino José Ferreira de Souza, pela orientação neste trabalho, por sua paciência, dedicação e por tudo que me ensinou. Seus ensinamentos foram além do conhecimento científico necessário a este trabalho. Ao professor Paulo José Duarte Neto, pela coorientação, sua contribuição foi fundamental.

A minha mãe, Josefa Marques do Nascimento, por todo seu amor e carinho incondicionais, por suas palavras e orações. Ao meu pai, Edmilson Luis do nascimento. Aos meus irmãos: Ismael, Janaina, Henrique, Natanael, Juliana, Camila, Luana, Ricardo e Paula, pelo companheirismo, pelas palavras de apoio e incentivo nos momentos difíceis. A Eduardo Oliveira dos Santos, pela ajuda, pelo companheirismo e por todo o amor dedicado.

A Raquel Costa da Silva, amiga inseparável que sempre esteve ao meu lado nos bons e maus momentos. A Jeniffer Johana Duarte, pela amizade, pelos conhecimentos compartilhados e pela ajuda neste trabalho. A Samara Brito, pela ajuda que me deu quando cheguei em Recife. Aos amigos Lilia Santos e Leonardo Tavares.

Aos amigos da pós-graduação: Henrique, Vitória, Karla e Isaac, pela ajuda e pela contribuição com palavras de incentivo e apoio.

Ao Instituto Federal do Sertão Pernambucano, por todo o apoio; especialmente as colegas de trabalho Juliana Figueiroa, Denise Silva e Susan Edith.

Aos Professores de Graduação Mário de Assis, Zelálber Gondim, e em especial a Juscelino Pereira da Silva, que deu grande incentivo a minha carreira acadêmica.

Ao secretário Marco Antônio dos Santos, pela assistência.

## Resumo

Em ensaios experimentais usualmente se faz necessário a extração de derivadas dos dados obtidos, para o estudo e caracterização do fenômeno em questão. Tais dados contêm ruídos aleatórios e/ou erros estatísticos e técnicas usuais de diferenciação numérica, como diferenças finitas, podem amplificar o ruído. Manter o ruído inerente aos dados sob controle é imprescindível para não introduzir comportamentos espúrios nos dados. No presente estudo, aplicamos uma metodologia alternativa na análise das curvas de crescimento de peixes. Nesta metodologia, a curva de crescimento é aproximada por uma função suave que não está associada a um modelo de crescimento e, portanto, é independente de estimação de parâmetros. O método baseia-se no processo de regularização de Tikhonov e consiste em um procedimento simples e confiável para se calcular derivadas de dados experimentais. O processo é independente da natureza dos dados e pode lidar com pontos de dados não uniformemente distribuídos. O método pode ser estendido para derivadas de ordem mais altas e também pode ser usado para suavizar dados experimentais. Aplicamos o método ao ajuste da curva de crescimento de três espécies de peixes: *Mugil curema*, *Thunnus obesus* e *Pseudupeneus maculatus*, cujos dados foram previamente analisados via modelos de crescimento. Concluimos que a metodologia empregada aproxima com precisão as curvas da primeira e segunda derivada e fornece informações sobre as taxas instantâneas de crescimento animal.

**Palavras-chave:** diferenciação numérica; ruído; curva de crescimento de peixes; modelo de crescimento; regularização de Tikhonov; derivadas.

## Abstract

In experimental research usually it is need to extract derivatives from the obtained data for the study and characterization of the phenomenon in question. Such data contains random noise and / or statistical errors and usual techniques of numerical differentiation, such as finite differences, can amplify the noise. Keep the noise inherent to the data under control is essential to avoid misinterpretation of the phenomenon. In the present study we applied an alternative methodology to analyze fish growth curves. In this methodology the growth curve is approximated by a smooth function that is not associated with a growth model and therefore is independent of parameter estimation. The method is based on Tikhonov regularization process and consists in a simple and reliable procedure for calculating derivative from experimental data. The process is independent of the nature of the data and can handle points which are not evenly distributed. The method can be extended to derivatives of higher order and can also be used to smooth experimental data. We apply the method to the adjustment for growth curves of the three species of fish: *curema Mugil*, *Thunnus obesus* and *Pseudupeneus maculatus*, whose data were previously analyzed through growth models. We conclude that the methodology here employed approximates accurately the curves of the first and second derivative and provides information on the instantaneous rate animal growth.

**Keywords:** numerical differentiation; noise; fish growth curve; growth model; Tikhonov regularization; derivatives.

---

## Lista de Figuras

---

4.1	Polinômio $P_2(x)$ que interpola $g(x)$ . . . . .	27
4.2	Regra de Simpson composta . . . . .	29
4.3	Aproximação para a primeira derivada por diferenças finitas. . . . .	30
6.1	Gráfico das curvas $y(x) \times y^C(x)$ . A curva em preto é referente aos dados de $y(x)$ , e a curva em vermelho é referente aos dados de $y^C(x)$ . . . . .	45
6.2	Gráfico da derivada $dy/dx$ . A curva em preto é da derivada exata $dy/dx$ , e a curva em vermelho é da aproximação fornecida pela equação (5.6). . . . .	46
6.3	Gráfico da derivada segunda $d^2y/dx^2$ . A curva em preto é da derivada exata $d^2y/dx^2$ , e a curva em vermelho é da aproximação fornecida pela equação (5.6). . . . .	46
6.4	Curva de crescimento <i>Mugil curema</i> . Curva em azul: ajuste fornecido pelo modelo de von Bertalanffy; curva em vermelho: ajuste fornecido pelo método de diferenciação numérica. . . . .	50
6.5	Curva da taxa de crescimento em cm/ano, da espécie <i>Mugil curema</i> , estimada a partir da equação (5.6). . . . .	50
6.6	Secção transversal da primeira espinha dorsal de <i>T. obesus</i> (128 cm) mostrando os diâmetros da coluna e de anel (Fonte: Duarte-Neto, Higa e Lessa, 2012, p. 151). . . . .	53

6.7	Curva de crescimento <i>Thunnus obesus</i> . Curva em azul: ajuste fornecido pelo modelo de von Bertalanffy; curva em vermelho: ajuste fornecido pelo método de diferenciação numérica. . . . .	56
6.8	Curva de crescimento <i>Thunnus obesus</i> . Curva em azul: ajuste fornecido pelo modelo Gompertz; curva em vermelho: ajuste fornecido pelo método de diferenciação numérica. . . . .	56
6.9	Curva de crescimento <i>Thunnus obesus</i> . Curva em azul: ajuste fornecido pelo modelo Logístico; curva em vermelho: ajuste fornecido pelo método de diferenciação numérica. . . . .	57
6.10	Curva de crescimento <i>Thunnus obesus</i> . Curva em azul: ajuste fornecido pelo modelo Richards; curva em vermelho: ajuste fornecido pelo método de diferenciação numérica. . . . .	57
6.11	Curva da taxa de crescimento em cm/ano, da espécie <i>Thunnus obesus</i> , estimada a partir da equação (5.6). . . . .	58
6.12	Curva de crescimento <i>Pseudupeneus maculatus</i> . Curva em azul: ajuste fornecido pelo modelo de von Bertalanffy; curva em vermelho: ajuste fornecido pelo método de diferenciação numérica. . . . .	60
6.13	Curva taxa de crescimento, em cm/ano, da espécie <i>Pseudupeneus maculatus</i> .	61

---

## Lista de Tabelas

---

6.1	Média e desvio padrão de idade-comprimento retrocalculados para ambos os sexos de <i>Mugil curema</i> (Fonte: Santana et al., 2009,). . . . .	48
6.2	Parâmetros de crescimento com correspondente erro padrão para cada modelo usando dados de comprimento-idade retrocalculados e observados. $m_1 =$ von Bertalanffy, $m_2 =$ Gompertz, $m_3 =$ Logístico e $m_4 =$ Richards (Fonte: Duarte-Neto, Higa e Lessa, 2012, p. 154). . . . .	54
6.3	Média e desvio padrão de comprimento-idade retrocalculados e observados de <i>T. obesus</i> (Fonte: Duarte-Neto, Higa e Lessa, 2012, p. 153). . . . .	55

---

## Sumário

---

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>13</b>
1.1	Diferenciação Numérica . . . . .	13
1.2	Diferenciação e suavização de dados experimentais . . . . .	14
1.3	Organização da Dissertação . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Objetivos</b>	<b>18</b>
2.1	Objetivo Geral . . . . .	18
2.2	Objetivos específicos . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Modelos de Crescimento Animal</b>	<b>19</b>
3.1	Curvas de Crescimento de peixes . . . . .	22
3.1.1	Modelo de von Bertalanffy . . . . .	24
3.1.2	Modelo de Crescimento de Gompertz, Logístico e de Richards . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Métodos Numéricos</b>	<b>26</b>
4.1	Integração Numérica . . . . .	26
4.1.1	Regra de Simpson . . . . .	27
4.1.2	Regra de Simpson Composta . . . . .	28
4.2	Diferenças Finitas . . . . .	29

4.3	Regularização de Tikhonov . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Método</b>	<b>36</b>
5.1	Método de Diferenciação . . . . .	36
5.1.1	Regularização de Tikhonov . . . . .	39
5.1.2	Validação Cruzada Generalizada . . . . .	41
<b>6</b>	<b>Aplicações</b>	<b>44</b>
6.1	Dados sintéticos . . . . .	44
6.2	Estimação de idade e crescimento de <i>Mugil curema</i> . . . . .	47
6.3	Estimação de idade e crescimento de <i>Thunnus obesus</i> . . . . .	51
6.4	Estimação de idade e crescimento de <i>Pseudupeneus maculatus</i> . . . . .	58
6.5	Discussão . . . . .	61
<b>7</b>	<b>Conclusões e Trabalhos Futuros</b>	<b>64</b>
	<b>Referências</b>	<b>65</b>

### 1.1 Diferenciação Numérica

A diferenciação dá uma medida da taxa na qual uma grandeza varia (Gilat e Subramaniam, 2008). Taxas de variação de grandezas aparecem em vários fenômenos de interesse físico, químico e biológico. O problema de diferenciação numérica consiste na determinação da derivada de uma função a partir dos valores discretos da mesma. A função a ser diferenciada pode ser dada como uma expressão analítica ou como um conjunto de pontos discretos, no primeiro caso a derivada pode ser determinada analiticamente. No caso em que a diferenciação analítica da função é muito difícil ou impossível, ou quando a função é especificada como um conjunto de pontos discretos, utilize-se a diferenciação numérica.

A diferenciação numérica é realizada em um conjunto de dados específicos como um conjunto de pontos discretos, ou dados experimentais. Duas abordagens podem ser usadas no cálculo da aproximação numérica da derivada em um ponto. Uma delas é a aproximação por diferenças finitas, em que a aproximação da derivada de uma função em um dado ponto baseia-se nos valores da função na vizinhança deste ponto. A precisão da aproximação por diferenças finitas depende da precisão dos pontos do conjunto de dados, do espaçamento entre os pontos e da fórmula específica usada na aproximação (Gilat e

Subramaniam, 2008).

Uma outra abordagem a diferenciação numérica corresponde ao uso de uma função de aproximação, neste caso, faz-se uma aproximação dos pontos a serem diferenciados utilizando uma expressão analítica que possa ser facilmente diferenciada.

A necessidade da diferenciação numérica surge de vários problemas matemáticos e aplicações práticas como, por exemplo, métodos numéricos para a solução de equações diferenciais ordinárias (Milne, 1953); problemas inversos em equações físico-matemáticas (Engl, Hanke e Neubauer, 1996); identificação dos pontos de descontinuidade em processamento de imagem (Deans, 1983), etc.

Podemos encontrar vários trabalhos que tratam do problema da diferenciação numérica, destacando Hanke e Sherzer (2001), Engl, Hanke e Neubauer (1996), Wang, Jia e Cheng (2002), que tratam da técnica de regularização para derivadas de primeira e segunda ordem; e Anderssen e Helgland (1999), que trata a técnica de regularização para derivadas de ordem superior.

## 1.2 Diferenciação e suavização de dados experimentais

Em ensaios experimentais, nos quais se tem interesse nas taxas de variação das grandezas medidas em função do tempo, ou de outras variáveis inerentes ao estudo de determinado fenômeno, busca-se estimar parâmetros de um modelo que o explique. Como, por exemplo, a taxa relativa de crescimento em função do tempo na descrição de processos biológicos. Queiroz (2009), utilizou modelos matemáticos para descrever curvas de crescimento em aves, com a finalidade de estimar parâmetros genéticos e fenotípicos para o melhoramento genético animal. Lin (2000), desenvolveu um modelo matemático, com base nas alterações dependentes do tempo da taxa de crescimento específico, para a previsão do crescimento de células microbianas. Em Birch (1999), uma taxa de crescimento relativa em função do tempo é usada em um modelo empírico de crescimento vegetal. Lobô (2008), estimou parâmetros genéticos para a avaliação genética de caprinos e ovinos. Zweitering (1990), usa a taxa de crescimento específica máxima para fazer

reparametrização de modelos de crescimento de bactérias.

Dessa forma, nos ensaios experimentais, usualmente precisamos realizar diferenciação numérica em um conjunto de dados para obter sua taxa de variação para o estudo e caracterização de determinado fenômeno. Quando os dados a serem diferenciados são obtidos a partir de medições experimentais, eles usualmente apresentam dispersão por causa de erros experimentais ou incertezas nas medições (ruído) (Gilat e Subramaniam, 2008). Se um conjunto de dados experimentais for diferenciado usando a forma mais simples da aproximação por diferenças finitas então grandes variações serão vistas no valor da derivada. Assim, realizar diferenciação sem o controle da amplificação do ruído, pode introduzir comportamentos espúrios nos dados, levando a resultados não confiáveis. Este fato torna necessário o desenvolvimento de ferramentas numéricas capazes de fornecer uma aproximação para essas derivadas e que, ao mesmo tempo, mantenha o ruído sob controle; tal procedimento é comumente designado por suavização (Golay, 1964).

Dentre as técnicas mais amplamente usadas para diferenciação de dados experimentais e remoção de ruído estão os filtros de alisamento. O processo de alisamento emprega um número de coeficientes, normalmente menor do que o número de pontos dos dados, para ajustar um polinômio através da média dos pontos vizinhos. As técnicas clássicas são Filtro de médias móveis, Filtro da mediana e o Filtro de Savitsky-Golay (SG) (Golay, 1964). Dentre esses métodos, o mais popular é o filtro de Savitsky-Golay, nesse método para cada ordenada que se deseja filtrar, calcula-se um polinômio de ordem pré-estabelecida, que será ajustado à esta ordenada e suas vizinhas, segundo o Método dos Mínimos Quadrados. A quantidade de ordenadas vizinhas que participam desse ajuste polinomial é exatamente a largura da janela, que também, deve ser pré-estabelecida, e a ordenada que se deseja filtrar tem a abscissa do centro da janela (Caria, 2009),(Gorry, 1990). Uma das limitações desse método é que os pontos dos dados devem ser uniformemente espaçados. Para o cálculo de derivadas de ordem superior, essa solução pode levar a resultados indesejados. Além disso, a filtragem pode suprimir informações importantes contidas nos dados.

Podemos abordar o problema de diferenciação numérica através dos métodos de re-

gularização. Os métodos de regularização consistem em determinar uma solução estável e compatível de problemas mal-postos, utilizando soluções de uma família de problemas bem-postos. Dentre os vários métodos de regularização existentes na literatura, um dos mais utilizados é o método de regularização de Tikhonov (Lubbansky, et al., 2006), (Cheng; Yamamoto, 2000), (Golub; Hansen; O’Leary, 1999), o qual trabalha com um parâmetro de regularização embutido que assegura o equilíbrio entre preservar as características essenciais dos dados e manter a amplificação do ruído sob controle. Existem vários métodos para a escolha do parâmetro de regularização apropriado, tais como o princípio da discrepância de Morozov (1966) os métodos heurísticos como o critério da curva-L de Hansen e O’Leary(1993), o método de ponto fixo de Bazán (2008) e Validação Cruzada Generalizada de Golub, Heath e Wahba (1979).

A regularização de Tikhonov baseia-se na minimização de uma combinação linear de dois termos, o primeiro expressa o erro de aproximação dos dados, e o outro. o nível de distanciamento da condição de suavidade. A combinação a ser minimizada envolve um parâmetro de regularização que pondera a importância relativa dos dois termos.

Com regularização, em vez de realizar diferenciação numérica nos dados experimentais uma abordagem diferente pode ser dada a este problema, convertendo-o em um problema de resolver uma equação integral de primeira espécie, cuja solução dá a segunda derivada dos pontos, que pode ser integrada para dar a primeira derivada. Uma das vantagens dessa abordagem é que, sob essa ótica, não é necessário nenhuma suposição sobre a forma funcional dos dados. Outra vantagem é que existem vários métodos para resolver essa classe de equações integrais. E ainda, a regularização garante a importante propriedade de reter as características essenciais dos dados e manter a amplificação do ruído sob controle.

### 1.3 Organização da Dissertação

Esta dissertação encontra-se dividida em sete capítulos, contando com este capítulo introdutório. No capítulo 2, expomos os objetivos que pretendemos alcançar no decorrer do presente trabalho.

No capítulo 3, faremos uma explanação sobre a dinâmica do estudo de crescimento na produção animal, abordando os principais modelos de crescimento, dando enfoque ao modelo de crescimento de von Bertalanffy, certamente o modelo mais usado em estudos de crescimento de peixes.

No capítulo 4, versaremos sobre métodos numéricos, fazendo uma breve revisão de alguns conceitos, nele discutiremos integração numérica, mais especificamente a regra de Simpson. Em seguida, trataremos um pouco sobre a aproximação para derivadas pelo método das diferenças finitas. Também será apresentado o método de regularização de Tikhonov, o qual será usado, posteriormente, no processo de suavização de dados.

No capítulo 5, apresentaremos o método de diferenciação de dados experimentais, partindo de um conjunto de dados experimentais genérico, buscamos obter uma expressão que converta os dados experimentais em segundas derivadas, para isso iremos utilizar métodos de derivação e integração numérica e o método de regularização de Tikhonov.

No capítulo 6, apresentamos os resultados das análises de dados através do método de diferenciação proposto. Por fim, o Capítulo 7 apresenta conclusões, discute os resultados obtidos e vislumbra possíveis futuros trabalhos.

### 2.1 Objetivo Geral

Aplicar um método de diferenciação de dados experimentais em estudos de modelos de crescimento de peixes.

### 2.2 Objetivos específicos

- Fornecer um ajuste para a curva de crescimento de massas de dados de comprimento-idade de espécies de peixes.
- Confrontar as curvas de crescimento fornecido por essa metodologia, com as curvas dos modelos de crescimento usuais dispostos na literatura.
- Estimar uma taxa de crescimento efetiva.

## CAPÍTULO 3

---

### Modelos de Crescimento Animal

---

O termo crescimento significa mudança de magnitude. Essas mudanças se referem a variações de diversas dimensões físicas como volume, peso, ou massa do corpo do organismo como um todo ou em seus vários tecidos em relação ao tempo; também dizem respeito ao conteúdo de proteínas, lipídios ou outros constituintes químicos do corpo, ou ao conteúdo calórico (energia) de todo o corpo ou de seus tecidos (Weatherley e Gill, 1987 apud Lizama e Takemoto, 2000).

Em produção animal, é comum o uso de modelos para a descrição matemática de fenômenos biológicos, como o crescimento. Assim, variáveis quantitativas são tomadas para representar fatores que influenciam o fenômeno (Rondon et al., 2002). A utilização de modelos matemáticos para o estudo de níveis de crescimento animal, é uma técnica que pode auxiliar na melhor forma de exploração de determinada espécie. Dentre esses modelos, os mais utilizados são os baseados em curvas de crescimento animal, pois estes apresentam parâmetros que podem ser interpretados biologicamente. Estes parâmetros descrevem, principalmente, o peso ou altura na idade adulta e a velocidade de crescimento ou taxa de maturidade.

Segundo Braccini Neto (2002), o conhecimento da curva de crescimento possibilita a adoção de práticas de manejo que otimizem a produção de carne, priorizando as neces-

sidades nutricionais de cada fase de crescimento. Também podem ser empregadas para prever a idade ótima ao abate, em função da taxa máxima de crescimento.

O estudo de curvas de crescimento geralmente é feito por meio do ajuste de funções não lineares, que possibilitam sintetizar informações de todo o período de vida dos animais, ou seja, um conjunto de informações em série de peso, altura, comprimento, tamanho populacional ou volume por idade, em um pequeno conjunto de parâmetros interpretáveis sob o ponto de vista biológico, facilitando o entendimento do fenômeno e ressaltando alterações significativas ao longo do processo de crescimento (Pereira, 2000).

Segundo Freitas (2005), entre as várias aplicações das curvas de crescimento na produção animal, destacam-se: resumir em três ou quatro parâmetros as características de crescimento da população (peso inicial, taxa de crescimento e peso adulto), pois alguns parâmetros dos modelos não-lineares utilizados possuem interpretação biológica; avaliar o perfil de respostas de tratamentos ao longo do tempo; estudar as interações de respostas das subpopulações ou tratamentos com o tempo; identificar em uma população os animais mais pesados em idades mais jovens; essas informações podem ser obtidas investigando-se o relacionamento entre o parâmetro  $k$  das curvas de crescimento, que expressam a taxa de declínio na taxa de crescimento relativa, e o peso limite do animal ou peso assintótico, e obter a variância entre e dentro de indivíduos de grande interesse nas avaliações genéticas.

Dentre os modelos mais utilizados para descrever a curva de crescimento animal, os mais usados são os modelos de von Bertalanffy (von Bertalanffy, 1957), Gompertz (Laird, 1965), Logístico (Nelder, 1961) e Richards (Richards, 1959). Alguns requisitos devem ser satisfeitos para que uma função de crescimento descreva a relação peso (ou comprimento)-idade, dentre os quais, a interpretação biológica dos parâmetros (confiabilidade), um ajuste com pequenos desvios (precisão) e o grau de dificuldade do ajuste (operacionalidade) (Scapim, 2008).

Cada modelo de crescimento apresenta suas vantagens e desvantagens sob o ponto de vista estatístico. Dessa forma, o principal questionamento a respeito desses modelos é qual o mais apropriado para descrever o crescimento de determinada espécie. Uma

solução para esse questionamento baseia-se em informações provenientes de avaliadores de qualidade de ajuste, tais avaliadores visam indicar estatisticamente o melhor modelo que se ajuste aos dados. Porém, na presença de diferentes populações, muitas vezes o modelo que melhor representou o crescimento dos animais de uma população pode não ser o melhor para as demais, ou seja, os resultados dos avaliadores podem variar de acordo com a população considerada (Silva, 2010).

Dentre os avaliadores da qualidade dos ajustes dos modelos encontrados na literatura, a maioria dos trabalhos envolvendo estudo de curvas de crescimento, utiliza, principalmente, o Quadrado Médio do Erro (QME), o coeficiente de determinação ( $R^2$ ) e o critério de informação de Akaike (AIC) (Santana, 2013).

O QME expressa a variância residual proveniente do ajuste do modelo considerado, e ao se comparar vários modelos, quanto menos o seu valor mais adequado é o modelo em avaliação. O  $R^2$  expressa a proporção da variação total observada nos dados amostrais que foi explicada pelo modelo de regressão adotada. Isto é, quanto mais próximo da unidade for o valor do coeficiente de determinação, sugere-se que o modelo ajustado é uma boa representação dos dados em análise. O critério de informação de Akaike (AIC) é baseado no ponto máximo da função de verossimilhança, acrescido de uma penalidade associada ao número de parâmetros do modelo. Quanto menor o valor do AIC, melhor o modelo ajustado.

Podemos encontrar na literatura estudos que indicam modelos diferentes como o melhor ajuste para uma mesma população, ou ainda, estudos que indicam ajustar diferentes modelos para idades diferentes de uma mesma população. Como exemplo, Guedes et al. (2004), ajustaram os modelos von Bertalaffy, Gompertz, Brody, Logístico e Richards, a dados de peso-idade de cordeiros da raça Bergamácia e Santa Inês e concluíram que os modelos que melhor se ajustavam aos dados foram von Bertalaffy e Gompertz. Por outro lado, Lobo et al. (2006), ajustaram os mesmos modelos a dados de peso-idade de ovinos Santa Inês e concluíram que o modelo Richards forneceu o melhor ajuste. Em outro estudo, Malhado et al. (2008), ajustaram curvas de crescimento de ovinos mestiços

Santa Inês x Texel, concluindo que os modelos de Gompertz e von Bertalanffy, foram os melhores para descrever a fase inicial de crescimento dessa espécie, porém, indicaram que a partir dos 120 dias de idade, o modelo logístico é o que melhor se ajusta ao crescimento desses animais.

### 3.1 Curvas de Crescimento de peixes

A determinação da idade e crescimento é um dos aspectos biológicos mais importantes, por ser um quesito indispensável aos cálculos de mortalidade e avaliação de recursos pesqueiros (Cousseau Cotrina, 1975). Estudos de crescimento de peixes podem fornecer informações básicas sobre a estratégia de vida, estrutura de populações e mudanças no crescimento destas, devido a perturbações ambientais ou pela pesca, o que aumenta a compreensão da biologia dos peixes e forma a base dos modelos de dinâmica de populações (Radtke Hourigan, 1990).

Segundo Lizama e Takemoto (2000), os peixes freqüentemente respondem às mudanças que ocorrem no ambiente, as quais impõem mudanças sobre o crescimento, que são observadas durante sua vida. Inúmeros são os eventos, durante a vida de uma espécie de peixe, responsáveis pelas variações que ocorrem em seus padrões de crescimento. A saber, reprodução (Barbieri e Barbieri, 1983); o fotoperíodo (Ross e Hunstman, 1982); a salinidade (Fagade, 1974); o suprimento alimentar (Beverton e Holt, 1993; Bruton e Allanson, 1974; Bowering, 1978); o hábito alimentar (Olmsted e Kilambi, 1978) e as categorias tróficas, as quais os peixes pertencem (Grimes, 1978).

A interpretação de anéis anuais em estruturas calcificadas é o método mais aceito para a determinação da idade em peixes (Casselman, 1983). Tais determinações podem ser efetuadas em várias estruturas rígidas nos peixes: escamas, otólitos, vértebras, ossos operculares, espinhos das nadadeiras dorsal e peitoral entre outras (Cutrim e Batista, 2005). A determinação da idade e crescimento de peixes é um dos elementos centrais na avaliação dos estoques e recursos pesqueiros, normalmente realizada através de modelos de produção que permitem diagnosticar mudanças e fazer projeções sobre o estoque

(Domingues e Hayashi, 1998).

O estudo do crescimento por meio do ajuste de um modelo que descreva todo o período de vida do animal mostra-se efetivo, pois condensa as informações de uma série de dados em um pequeno conjunto de parâmetros interpretáveis biologicamente. Pode-se obter, com isto, o conhecimento preciso de, taxas de crescimento, taxas de ganho e graus de maturidade em qualquer estágio de desenvolvimento do animal, que são fatores importantes na avaliação de desempenho produtivo e econômico da criação (ALVES, 1986).

Para estimar a taxa de crescimento é necessário determinar os grupos etários e taxas de crescimento da população, o que não é tarefa fácil, especialmente em peixes sob condições tropicais, pois as marcas que definem os anéis de crescimento são pouco visíveis e a validação das classes etárias nem sempre é possível (Lowe-McConnell 1999 apud Gomiero et al, 2007). Assim, em estudos de crescimento animal os parâmetros de crescimento são geralmente estimados por meio de dados de frequência de comprimento, que contêm informações sobre o comprimento médio em cada grupo etário, e pela posição das modas associadas com as coortes (Basson et al. 1988).

A abordagem mais comum na análise de dados de crescimento-idade de peixes é ajustar os dados a um único modelo, usualmente o modelo de Von Bertalanfy, e estimar os parâmetros e a sua precisão tendo por base somente esse modelo. No entanto, perante a existência de outros modelos matemáticos de crescimento, o estudo do crescimento de peixes não se pode basear somente na escolha de um modelo e a estimação dos parâmetros para esse modelo, sem considerar outras alternativas, mas sim na escolha de vários modelos e posterior inferência e estimação dos parâmetros para cada modelo (Borges, 2008).

Os modelos de crescimento de peixes, são modelos matemáticos que utilizam parâmetros para descrever o crescimento médio de peixes em todo o processo de crescimento. Geralmente esses modelos apresentam os seguintes parâmetros: comprimento assintótico, que é uma estimativa do comprimento nas últimas pesagens; taxa de crescimento relativa, que é uma estimativa da velocidade de crescimento e um parâmetro de condição inicial que teoricamente seria o ponto no tempo no qual o peixe teria comprimento zero (Borges,

2008).

A utilização de modelos de crescimento consagrados, como Gompertz, Brody, von Bertalanffy, Logístico e Richards, tem a vantagem de resumir em poucos parâmetros informações do desenvolvimento ponderal dos animais. Por outro lado, deixam de detalhar minúcias entre cada período (dia) do crescimento animal (Tholon e Queiroz, 2009). Outra desvantagem desses modelos é que eles podem superestimar ou subestimar os pesos iniciais e finais nas espécies animais estudadas (Freitas, 2005).

### 3.1.1 Modelo de von Bertalanffy

O modelo de crescimento de von Bertalanffy (von Bertalanffy, 1957) pressupõe que a taxa de crescimento, dada pelo incremento no comprimento por unidade de tempo, decresce à medida que o comprimento do peixe aumenta, e que esse decréscimo é linear, ou seja, à medida que o peixe aproxima-se do comprimento máximo assintótico, a taxa de crescimento tende a zero.

Um modelo que descreve esse decréscimo linear da taxa de crescimento (em comprimento) com a idade, é dado pela seguinte equação diferencial linear não homogênea, com dois parâmetros  $w$  e  $k$  e condição inicial  $L(t_0) = L_0$ :

$$\frac{dL(t)}{dt} = w - kL(t) \quad \text{com} \quad w > 0, k > 0 \quad (3.1)$$

Onde  $L(t)$  é o comprimento na idade  $t$ ,  $w$  é a taxa de crescimento no instante inicial  $t_0$  e  $k$  é um parâmetro de crescimento, com unidade  $t^{-1}$ , relacionado com a velocidade em que a curva atinge o comprimento máximo assintótico.

Como dissemos, a taxa de crescimento decresce linearmente como função do tempo tendendo a zero até atingir o comprimento máximo assintótico  $w/k = L_\infty$ .

Substituindo esse valor na equação (3.1), obtemos:

$$\frac{dL(t)}{dt} = k(L_\infty - L(t)) \quad \text{com} \quad L_\infty > 0, k > 0 \quad (3.2)$$

Resultando na equação

$$L(t) = L_{\infty} (1 - e^{-k(t-t_0)}) + L_0 e^{-k(t-t_0)} \quad \text{com } L_{\infty} > 0, k > 0$$

Fazendo  $L_0 = 0$  e interpretando  $t_0$  como a idade em que o peixe teria comprimento zero, obtemos a equação de von Bertalanffy:

$$L(t) = L_{\infty} (1 - e^{-k(t-t_0)}) \quad \text{com } L_{\infty} > 0, k > 0 \quad (3.3)$$

onde  $L(t)$  é o comprimento na idade  $t$ ,  $L_{\infty}$  é o comprimento assintótico,  $k$  é taxa de crescimento relativa e  $t_0$  é o ponto no tempo no qual o peixe teria comprimento zero.

### 3.1.2 Modelo de Crescimento de Gompertz, Logístico e de Richards

Os modelos de crescimento de Gomperts, logístico e de Richards são dados, respectivamente, pelas seguintes equações:

$$L(t) = L_{\infty} e^{-e^{-k(t-t_0)}} \quad (3.4)$$

$$L(t) = L_{\infty} (1 + e^{-k(t-t_0)})^{-1} \quad (3.5)$$

$$L(t) = L_{\infty} (1 + r e^{-k(t-t_0)})^{-\frac{1}{r}} \quad (3.6)$$

onde  $L(t)$  é o comprimento na idade  $t$ ,  $L_{\infty}$  é o comprimento assintótico,  $k$  é taxa de crescimento relativa (destacando que o parâmetro  $k$  tem acepção diferente em cada modelo),  $t_0$  é o ponto no tempo no qual o peixe teria comprimento zero e  $r$  é um fator adimensional.

Nosso propósito nesse capítulo é expor alguns conceitos inerentes ao estudo do método de diferenciação que iremos apresentar no próximo capítulo. A ligação entre tais conceitos é que eles serão usados em algum momento no processo de suavização, assim decidimos expô-los em um só capítulo e fazer uma abordagem de forma breve e objetiva, a fim de evitarmos nos prolongar por demasiado. Na primeira seção, trataremos sobre integração numérica, com foco na regra de Simpson, na segunda seção, trataremos sobre diferenças finitas e na terceira versaremos sobre o método de regularização de Tikhonov.

## 4.1 Integração Numérica

Sabemos que se  $g(x)$  é uma função contínua em  $[a, b]$ , então esta função tem uma primitiva nesse intervalo, ou seja, existe  $G(x)$  tal que  $G'(x) = g(x)$ . No entanto, pode não ser fácil, ou até mesmo impossível determinar uma expressão analítica para  $G(x)$ .

Uma forma de se obter uma aproximação para a integral de  $g(x)$  num intervalo  $[a, b]$ , é através da integração numérica, cuja idéia basicamente consiste na substituição da função  $g(x)$  por um polimômio que a aproxime razoavelmente no intervalo  $[a, b]$ . Assim o problema fica resolvido pela integração de polinômios, o que é trivial de se fazer. Com este raciocínio, podemos deduzir fórmulas para aproximar  $\int_a^b g(x)dx$ .

Existem vários métodos de integração numérica, nesta seção veremos a regra de Simpson, que consiste em aproximar a função  $g(x)$  no intervalo  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$  por um polinômio interpolador de grau 2.

### 4.1.1 Regra de Simpson

Seja  $P_2(x)$  o polinômio que interpola  $g(x)$  nos pontos  $x_0 = a, x_1 = x_0 + h$  e  $x_2 = x_0 + 2h = b$ . Usamos a fórmula de Lagrange para expressar  $P_2(x)$  nos pontos  $x_0, x_1$  e  $x_2$ :

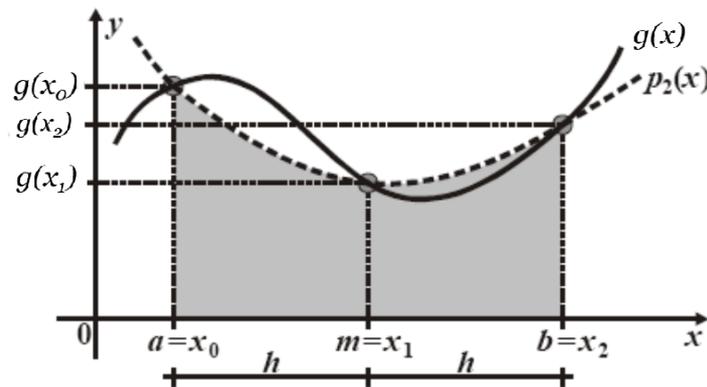


Figura 4.1: Polinômio  $P_2(x)$  que interpola  $g(x)$ .

$$\begin{aligned} P_2(x) &= L_0(x)g(x_0) + L_1(x)g(x_1) + L_2(x)g(x_2) \\ &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}g(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}g(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}g(x_2) \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned} (x_0 - x_1) &= a - (a + h) = -h \\ (x_0 - x_2) &= a - (a + 2h) = -2h \\ (x_1 - x_0) &= (a + h) - a = h \\ (x_1 - x_2) &= (a + h) - (a + 2h) = -h \\ (x_2 - x_0) &= (a + 2h) - a = 2h \\ (x_2 - x_1) &= (a + 2h) - (a + h) = h \end{aligned}$$

Então,

$$P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_0)}{-h(-2h)}g(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{h(-h)}g(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2h \cdot h}g(x_2)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x)dx &\cong \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx = \frac{g(x_0)}{2h^2} \int_{x_0}^{x_2} (x-x_1)(x-x_2)dx - \\ &-\frac{g(x_1)}{h^2} \int_{x_0}^{x_2} (x-x_0)(x-x_2)dx + \frac{g(x_2)}{2h^2} \int_{x_0}^{x_2} (x-x_0)(x-x_1)dx \end{aligned}$$

Fazemos a mudança de variáveis  $x - x_0 = zh$ . Daí  $dx = h dz$  e  $x = x_0 + zh$ , então

$$\begin{aligned} x - x_1 &= x_0 + zh - (x_0 + h) = (z - 1)h \quad \text{e} \\ x - x_2 &= (z - 2)h \end{aligned}$$

e, para

$$x = x_0 \Rightarrow z = 0; \quad x = x_1 \Rightarrow z = 1 \quad \text{e} \quad x = x_2 \Rightarrow z = 2$$

Com essa mudança temos,

$$\int_a^b g(x)dx = \frac{g(x_0)h}{2} \int_0^2 (z-1)(z-2)dz - g(x_1)h \int_0^2 z(z-2)dz + \frac{g(x_2)h}{2} \int_0^2 z(z-1)dz.$$

Resolvendo as integrais obtemos a regra de Simpson:

$$\int_{x_0}^{x_2} g(x)dx \cong \frac{h}{3}[g(x_0) + 4g(x_1) + g(x_2)] + \varepsilon. \quad (4.1)$$

onde  $\varepsilon$  é o erro da aproximação, que também pode ser estimado, mas aqui vamos omití-lo.

### 4.1.2 Regra de Simpson Composta

Na regra de Simpson composta, subdividimos o intervalo  $[a, b] = [x_0, x_m]$  em  $m$  subintervalos. Vamos supor que  $x_0, x_1, \dots, x_m$  são pontos igualmente espaçados,  $h = x_{i+1} - x_i$ , e  $m$  é par.

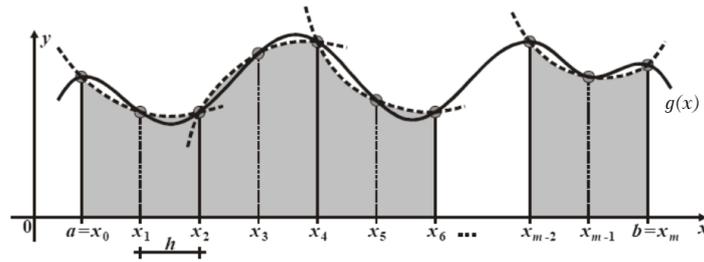


Figura 4.2: Regra de Simpson composta

Aplicando a regra de Simpson em cada par de subintervalos, temos

$$\int_a^b g(x)dx = \int_{x_0}^{x_m} g(x)dx = \sum_{k=1}^{m/2} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} g(x)dx = \frac{h}{3} \{ [g(x_0) + 4g(x_1) + g(x_2)] + [g(x_2) + 4g(x_3) + g(x_4)] + \dots + [g(x_{m-2}) + 4g(x_{m-1}) + g(x_m)] \}.$$

Assim, chegamos a fórmula para a regra de Simpson composta

$$\int_{x_0}^{x_m} g(x)dx = \frac{h}{3} \{ [g(x_0) + g(x_m)] + 4[g(x_1) + g(x_3) + \dots + g(x_{m-1})] + 2[g(x_2) + g(x_4) + \dots + g(x_{m-2})] \}. \quad (4.2)$$

## 4.2 Diferenças Finitas

Diferença finita é o análogo discreto da derivada. Assim, aproximações por diferenças finitas substituem o operador diferencial contínuo por uma aproximação discreta.

As aproximações por diferenças finitas para a primeira derivada podem ser feitas de três maneiras, a saber: diferenças avançadas, atrasadas e centrais:

- diferenças avançadas:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_j} \cong \frac{f_{j+1} - f_j}{\Delta}$$

- diferenças atrasadas:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_j} \cong \frac{f_j - f_{j-1}}{\Delta}$$

- diferenças centrais:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_j} \cong \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2\Delta}$$

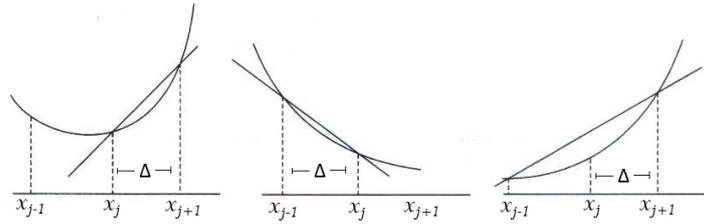


Figura 4.3: Aproximação para a primeira derivada por diferenças finitas.

onde  $\Delta = x_j - x_{j-1}$ , são pontos igualmente espaçados.

A seguir, iremos deduzir uma expressão para cada uma delas.

Consideremos a função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  com tantas derivadas quanto necessárias. Faremos  $x_0 = a, x_n = b$  e dividimos  $[a, b]$  em  $n$  partes iguais de comprimento  $\Delta = (b - a)/n$ , cada.

Assim,  $x_k = x_0 + k \cdot \Delta, k = 0, 1, \dots, n - 1$  e  $f_k \simeq f(x_k) = f(x_0 + k \cdot \Delta), k = 0, 1, \dots, n$ .

Fazendo expansão de Taylor de  $f$  no ponto  $x_{j+1} = x_j + \Delta$  em torno de  $x_j$ , temos:

$$f(x_{j+1}) = f(x_j) + \Delta \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_j} + \frac{\Delta^2}{2!} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x_j} + \frac{\Delta^3}{3!} \left. \frac{d^3f}{dx^3} \right|_{x_j} + \dots \quad (4.3)$$

A expressão acima pode ser reescrita como:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_j} = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{\Delta} - \frac{\Delta}{2!} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x_j} + \frac{\Delta^2}{3!} \left. \frac{d^3f}{dx^3} \right|_{x_j} - \dots$$

Desprezando-se os termos relativos as derivadas de ordem igual ou superior a dois, obtemos a expressão da aproximação com diferença avançada:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_j} \simeq \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{\Delta} \quad (4.4)$$

Analogamente, a expansão de Taylor de  $f$  no ponto  $x_{j-1} = x_j - \Delta$  em torno de  $x_j$  é:

$$f(x_{j-1}) = f(x_j) - \Delta \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_j} + \frac{\Delta^2}{2!} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x_j} - \frac{\Delta^3}{3!} \left. \frac{d^3f}{dx^3} \right|_{x_j} + \dots \quad (4.5)$$

A expressão acima pode ser reescrita como:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_j} = \frac{f(x_j) - f(x_{j-1}))}{\Delta} + \frac{\Delta}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_j} - \frac{\Delta^2}{3!} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{x_j} - \dots$$

Ao desprezar os termos relativos as derivadas de ordem dois ou superiores, obtemos a expressão da aproximação com diferença atrasada:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_j} \cong \frac{f(x_j) - f(x_{j-1}))}{\Delta} \quad (4.6)$$

Para obtermos uma aproximação com diferença central, fazemos (4.3) – (4.5), assim temos:

$$f(x_{j+1}) - f(x_{j-1})) = 2\Delta \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_j} + 2 \frac{\Delta^3}{3!} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{x_j} + 2 \frac{\Delta^5}{5!} \left. \frac{d^5 f}{dx^5} \right|_{x_j} + \dots$$

Podemos reescrever a expressão acima como:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_j} = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_{j-1}))}{2\Delta} - \frac{\Delta^2}{3!} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{x_j} - \frac{\Delta^4}{5!} \left. \frac{d^5 f}{dx^5} \right|_{x_j} - \dots$$

Desprezando os termos com derivadas de ordem superior a dois, obtemos a expressão da aproximação com diferença central:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_j} \cong \frac{f(x_{j+1}) - f(x_{j-1}))}{2\Delta} \quad (4.7)$$

Para determinar uma aproximação para a derivada de segunda ordem, fazemos (4.3) + (4.5), assim temos:

$$f(x_{j+1}) + f(x_{j-1})) = 2f(x_j) + 2 \frac{\Delta^2}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_j} + 2 \frac{\Delta^4}{4!} \left. \frac{d^4 f}{dx^4} \right|_{x_j} + \dots$$

Podemos reescrever a expressão acima, como:

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_j} = \frac{f(x_{j-1}) - 2f(x_j) + f(x_{j+1}))}{\Delta^2} - \frac{\Delta^2}{2} \left. \frac{d^4 f}{dx^4} \right|_{x_j} - \dots$$

Desprezando os termos com derivadas de ordem igual ou superior a quatro, obtemos a aproximação para a derivada de segunda ordem:

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_j} \cong \frac{f(x_{j-1}) - 2f(x_j) + f(x_{j+1}))}{\Delta^2} \quad \text{com } j = 2, \dots, k-1.$$

Podemos escrever

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_j} \cong \frac{1}{\Delta^2} \sum_j \beta_{ij} f_j \quad (4.8)$$

Ou em notação matricial

$$\frac{d^2 f_j}{dx^2} = \frac{1}{\Delta^2} \beta f \quad (4.9)$$

onde  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_k)$  e  $\beta$  é a matriz tridiagonal

$$\beta = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

### 4.3 Regularização de Tikhonov

A teoria de regularização está estreitamente relacionada com o conceito de problema mal-posto. Hadamard (1902) e (1923) introduziu o conceito de um problema bem-posto baseado na proposição de que o modelo matemático de um problema físico tem que satisfazer as propriedades de existência, unicidade e estabilidade da solução em relação aos dados. Se uma das propriedades não é satisfeita, Hadamard chamou o problema de mal-posto (Muniz, 1999).

A teoria geral e métodos para solucionar problemas mal-postos foi reconhecidamente iniciada pelo trabalho do russo Andrey Tikhonov (1943) e (1963), que foi quem, pela

primeira vez, de uma forma relativamente geral, estabeleceu um problema sobre a instabilidade de representações inversas apresentando suas soluções. Em 1944, estudando um problema de gravimetria, Tikhonov observou que a introdução de restrições poderia restaurar alguma estabilidade para o problema, e essa observação foi um dos pontos de partida para a teoria contemporânea de problemas mal-postos (Muniz, 1999).

Nas últimas décadas o desenvolvimento de teorias e métodos para a solução de problemas inversos desenvolveu-se intensamente. A regularização e sua aplicação a problemas inversos foi recentemente revista por Engl, Hanke e Neubauer (1996). Metodologias para a solução de problemas inversos caracteriza-se como o ramo da ciência moderna com intenso desenvolvimento e aplicações nas mais diversas áreas como acústica (Santosa et al, 1984), astronomia (Craig e Brown, 1986), tomografia computadorizada (Natterer, 1986), geofísica (Menke, 1989), biologia matemática (Cuppen, 1983), processamento de sinais (Thorpe e Scharf, 1995), espalhamento de ondas acústicas e eletromagnéticas (Cheng, Liu e Nakamura, 2005), problemas gravitacionais (Hansen, 2002), inversão da equação do calor (Carasso, 1982), restauração de imagens (Hansen, Nagy e O’Leary, 2006) e (Shaw Jr, 1972), estatística (Titterington, 1985), dentre outros.

Diversos sistemas ou processos físicos são comumente descritos por modelos matemáticos. A relação entre o processo físico e sua modelagem matemática pode ser descrita pela seguinte equação:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \quad (4.10)$$

onde,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ( $m \geq n$ ) é um operador que representa um modelo matemático,  $\mathbf{x}$  é uma função de entrada, e  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ , é um vetor de dados.

O problema de calcular  $\mathbf{b}$ , dado o operador  $\mathbf{A}$  e a função de entrada  $\mathbf{x}$ , é conhecido como problema direto. Já o problema de encontrar  $\mathbf{x}$ , dado o operador  $\mathbf{A}$  e sendo  $\mathbf{b}$  conhecido, é dito ser um problema inverso. Em outras palavras, sendo conhecido o operador  $\mathbf{A}$  e o vetor de dados  $\mathbf{b}$ , o problema inverso consiste na inversão do operador  $\mathbf{A}$ , caso exista.

Na resolução de problemas inversos, deve ser realizada uma análise com relação às três condições de Hadamard: existência, unicidade e estabilidade. Esses três requisitos definem o conceito de problema bem-posto (Borges, 2013). O problema (4.10) é bem posto se as seguintes condições são satisfeitas:

- i) existência: dado  $\mathbf{b}$  existe  $\mathbf{x}$  tal que  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ .
- ii) unicidade: dado  $\mathbf{b}$ , a equação  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  tem solução única.
- iii) Estabilidade: a solução depende continuamente dos dados, isto é, o operador  $A^{-1}$  é contínuo.

Se alguma dessas condições não for satisfeita, então dizemos que o problema é mal posto.

Em problemas aplicados, a equação (4.10) consiste do operador  $\mathbf{A}$  que descreve o fenômeno físico em questão,  $\mathbf{x}$  denota os parâmetros (funções ou vetores) a serem determinados e  $\mathbf{b}$  representa os dados experimentais obtidos com imprecisões de medida (ruído) que estão naturalmente ligadas a problemas aplicados. Em problemas aplicados, normalmente, esse problema é mal-posto. A regularização consiste em obter soluções aproximadas de (4.10) que sejam estáveis sob pequenas variações em  $\mathbf{b}$ .

A resolução numérica de problemas lineares mal-postos, do tipo (4.10), por mínimos quadrados procura minimizar a soma dos quadrados dos resíduos e conduz a um problema de minimização do tipo

$$x = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} \|Ax - b\|^2 \quad (4.11)$$

A regularização corresponde em inserir uma penalidade, a qual pode ser controlada por um parâmetro escalar  $\lambda$ . Neste método a solução para a equação (4.10) é dada por

$$x = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} \|Ax - b\|^2 + \lambda \|Lx\|^2 \quad (4.12)$$

onde  $L \in \mathbb{R}^{p \times n}$  e  $\lambda > 0$  são a matriz e o parâmetro de regularização, respectivamente.

O parâmetro de regularização  $\lambda$  pondera o requisito entre a minimização de (4.11) e a suavidade da solução (Scholkopf e Smola, 2001). O parâmetro  $\lambda$  é desconhecido, sendo um ponto fundamental a escolha do parâmetro ideal ( $\lambda_{opt}$ ), que pode ser feita por vários métodos. No entanto tal escolha não é uma tarefa trivial, pois o fundamental é escolher um parâmetro de regularização tal que a solução regularizada não seja demasiadamente distante da solução desejada. Dentre os principais métodos usados estão o princípio da discrepância de Morozov (1966), o método do erro monótono (Alifanov e Rumjancev, 1979) e (Hämarik e Raus, 1999), o princípio do balanceamento (Lepskij, 1990), o critério da curva-L de Hansen e O’Leary (1993), a Validação Cruzada Generalizada (GCV) de Golub, Heath e Wahba (1979) e o método do ponto fixo de Bazán (2008).

Neste capítulo, apresentaremos uma técnica de diferenciação e suavização de dados experimentais. Aqui, ao invés de abordar o problema diferenciando os dados da forma convencional, convertemos o problema em resolver uma equação integral de primeiro tipo. O método aqui abordado garante a propriedade de equilíbrio entre reter os recursos essenciais dos dados e manter a amplificação do ruído sob controle, estando baseado em Lubansk et al. (2006).

Este método de suavização trabalha com a técnica de regularização de Tikhonov, a qual possui um parâmetro de regularização que visa equilibrar a condição de suavização com a condição de controlar a amplificação do ruído nos dados. Outro ponto importante é a escolha desse parâmetro de regularização, a qual é feita pela técnica de validação cruzada generalizada.

## 5.1 Método de Diferenciação

Consideramos um conjunto de dados experimentais

$$(x_1^M, y_1^M), (x_2^M, y_2^M), \dots, (x_i^M, y_i^M), \dots, (x_n^M, y_n^M)$$

em ordem crescente da variável independente  $x$ ,  $y$  é a variável dependente, da qual queremos encontrar a derivada  $dy(x)/dx$ ,  $n$  é o número de pontos no conjunto de dados e  $M$  indica que estas são quantidades de medidas experimentais.

Faremos expansão de Taylor com resto integral em  $y(x)$  em torno de  $x_0$ . Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$y^C(x) = y(x_0) + \int_{\underline{x}=x_0}^x y'(\underline{x})d\underline{x}.$$

Integrando por partes, com  $u = y'(\underline{x})$ ,  $v = -(x - \underline{x})$ ,  $du = y''(\underline{x})d\underline{x}$  e  $dv = d\underline{x}$ , obtemos

$$y^C(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \int_{\underline{x}=x_0}^x (x - \underline{x})y''(\underline{x})d\underline{x}. \quad (5.1)$$

Usaremos a notação  $y(x_0) = y_0$ , e, por conveniência, a primeira e segunda derivada serão denoradas por  $r(x) = dy(x)/dx$  e  $f(x) = d^2y(x)/dx^2$ . Então, a equação (5.1) fica

$$y^C(x) = \int_{\underline{x}=x_0}^x (x - \underline{x})f(\underline{x})d\underline{x} + y_0 + (x - x_0)r_0. \quad (5.2)$$

onde  $x_0$  é um ponto arbitrário e  $C$  é usado para distinguir  $y$  calculado de sua equivalente medida experimental.

A equação (5.2) será resolvida em termos das funções desconhecidas  $r(x)$  e  $f(x)$ . Usaremos um método numérico baseado em regularização Tikhonov para resolver a equação (5.2) em termos de  $f(x)$ , que pode então ser integrada para obtermos  $r(x)$ .

Os dados são separados em dois vetores coluna

$$\mathbf{y}^M = (y_1^M, y_2^M, \dots, y_i^M, \dots, y_n^M)$$

e

$$\mathbf{x}^M = (x_1^M, x_2^M, \dots, x_i^M, \dots, x_n^M)$$

Não é exigido que  $\mathbf{x}^M$  seja uniformemente espaçado. O comprimento  $x_n^M - x_1^M$  é discretizado inserindo-se  $k$  pontos uniformemente espaçados  $\mathbf{x}^C = (x_1^C = x_1^M, x_2^C, \dots, x_i^C, \dots, x_k^C = x_n^M)$  separados por

$$\Delta = \frac{(x_n^M - x_1^M)}{(k - 1)}.$$

Usaremos a notação  $f(x_i^C) \equiv f_i$  para indicar o valor de  $f(x)$  em cada ponto de  $\mathbf{x}^C$ , então termos o vetor coluna  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_k)$ . Para garantir que  $\mathbf{f}$  é uma representação precisa de  $f(x)$ , o número de pontos de discretização  $k$  é usualmente maior que  $n$ .

A forma discretizada da equação (5.2) é

$$y_i^C = \sum_{j=1}^k B_{ij} f_j + y_0 + (x_i^M - x_0) r_0, \quad \text{com } i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.3)$$

ou em notação matricial

$$\mathbf{y}^C = \mathbf{B}\mathbf{f} + \mathbf{1}y_0 + (\mathbf{x}^M - \mathbf{1}x_0)r_0 \quad (5.4)$$

Onde  $\mathbf{B}$  é uma matriz  $n \times k$  de coeficientes numéricos conhecidos resultante da aproximação da integral da equação (5.2) por algum método numérico. No nosso caso, usamos a regra de Simpson. Então  $B_{ij}$  é dada por

$$B_{ij} = \begin{cases} \frac{\Delta}{3}(x_i - x_j) & \text{se } j = 1; \\ \frac{4\Delta}{3}(x_i - x_j) & \text{se } j \text{ for par;} \\ \frac{2\Delta}{3}(x_i - x_j) & \text{se } j \text{ for ímpar;} \\ 0, c.c. & \end{cases}$$

para  $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, k$  e  $i \geq j$ .

Adicionamos os vetores coluna  $\mathbf{1}$  e  $\mathbf{x}^M - \mathbf{1}x_0$  na matriz  $\mathbf{B}$ , e incorporamos  $y_0$  e  $r_0$  em  $\mathbf{f}$ . Então a equação (5.4) fica

$$\mathbf{y}^C = \mathbf{B}\mathbf{f} \quad (5.5)$$

As incógnitas  $f_1, f_2, f_3, \dots, f_k, y_0$  e  $r_0$  são requeridas para minimizar:

(i) A soma de quadrados  $S_1$  dos desvios:

$$S_1 = \sum_{i=1}^n (y^C(x_i^M) - y_i^M)^2$$

(ii) A soma de quadrados  $S_2$  de  $d^2 f(x)/dx^2$  nos pontos interiores de discretização:

$$S_2 = \sum_{j=2}^{k-1} \left( \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=x_j^C} \right)^2.$$

A condição (i) garante que  $y^C(x)$  se aproxima estreitamente de  $y^M(x)$  e a condição (ii) garante que  $f(x)$  não apresenta falsa flutuação.

Ao invés de satisfazer as condições (i) e (ii) separadamente, usaremos o método de regularização de Tikhonov, o qual minimiza uma combinação linear com as somas  $S_1$  e  $S_2$ , e utiliza um parâmetro de regularização que equilibra os dois itens acima.

### 5.1.1 Regularização de Tikhonov

Uma combinação linear  $R = S_1 + \lambda S_2$  é minimizada, afim de satisfazer as condições (i) e (ii), onde  $\lambda$  é um parâmetro de regularização. Um  $\lambda$  grande favorece a condição de suavidade, enquanto que um  $\lambda$  pequeno favorece a condição de precisão. A escolha apropriada de  $\lambda$  depende de  $n$  e  $k$ , e também do nível de ruído dos dados. Validação cruzada generalizada (GCV) será usada para orientar a escolha do  $\lambda_{opt}$ .

Para minimizar  $R$  devemos encontrar os valores  $f_j$  com  $j = 1, 2, \dots, k$  que minimizam  $R$ , ou seja, queremos encontrar os valores  $(f_1, \dots, f_k)$  tal que

$$\frac{\partial R}{\partial f_j} = 0, \text{ com } j = 1, 2, \dots, k.$$

Para esse cálculo precisamos expressar a segunda parcela de  $R$ , ou seja,  $S_2$  em termos de  $f_j$ . Para isso, usamos a aproximação por diferenças finitas de  $d^2f(x)/dx^2$  dada pela equação (4.9) no capítulo 4. Temos que

$$\frac{d^2f_j}{dx^2} = \frac{1}{\Delta^2}\beta f$$

com  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_k)$  e  $\beta$  é a matriz tridiagonal

$$\beta = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & & 0 & 0 \\ & 1 & -2 & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde as duas colunas de 0 é devido a incorporação dos vetores  $\mathbf{1}$  e  $\mathbf{x}^M - \mathbf{1}x_0$  na matriz  $\mathbf{B}$  e de  $y_0$  e  $r_0$  em  $\mathbf{f}$ .

Voltemos agora para a combinação linear  $R = S_1 + \lambda S_2$ , substituindo os respectivos valores de  $S_1$  e  $S_2$  temos

$$R = \sum_i (y_i^C - y_i^M)^2 + \lambda \sum_i \left( \frac{1}{\Delta^2} \sum_j \beta_{ij} f_j \right)^2.$$

Como  $y_i^C = \sum_j B_{ij} f_j$ , temos

$$R = \sum_i \left( \sum_j B_{ij} f_j - y_i^M \right)^2 + \frac{\lambda}{\Delta^4} \sum_i \left( \sum_j \beta_{ij} f_j \right)^2$$

Fazendo  $\frac{\partial R}{\partial f_m} = 0$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial f_m} &= \sum_i \left\{ 2 \left( \sum_j B_{ij} f_j - y_i^M \right) \sum_k B_{ik} \frac{\partial f_k}{\partial f_m} + 2 \frac{\lambda}{\Delta^4} \left( \sum_j \beta_{ij} f_j \right) \sum_l \beta_{il} \frac{\partial f_l}{\partial f_m} \right\} = 0 \\ &= 2 \sum_i \left\{ \sum_j \left( B_{ij} B_{im} + \frac{\lambda}{\Delta^4} \beta_{ij} \beta_{im} \right) f_j - B_{im} y_i^M \right\} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_j \sum_i \left( B_{ij} B_{im} + \frac{\lambda}{\Delta^4} \beta_{ij} \beta_{im} \right) f_j = \sum_i B_{im} y_i^M$$

Tem-se que

$$\sum_i B_{im} B_{ij} = \sum_i (B^T)_{mi} B_{ij} = (B^T B)_{mj}$$

$$\sum_i B_{im} y_i^M = \sum_i (B^T)_{mi} y_i^M = (B^T \vec{y}^M)_m$$

$$\sum_i \beta_{im} \beta_{ij} = \sum_i (\beta^T)_{mi} \beta_{ij} = (\beta^T \beta)_{mj}$$

Assim temos,

$$\sum_j \left[ (B^T B)_{mj} + \frac{\lambda}{\Delta^4} (\beta^T \beta)_{mj} \right] \vec{f}_j = (B^T \vec{y}^M)_m$$

em notação matricial

$$\left( \mathbf{B}^T \mathbf{B} + \frac{\lambda}{\Delta^4} \beta^T \beta \right) \mathbf{f} = \mathbf{B}^T \mathbf{y}^M$$

ou ainda

$$\mathbf{f} = \left( \mathbf{B}^T \mathbf{B} + \frac{\lambda}{\Delta^4} \beta^T \beta \right)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{y}^M \quad (5.6)$$

A equação (5.6) é uma equação linear algébrica que converte os dados experimentais  $\mathbf{y}^M$  em segundas derivadas  $f(x)$  descritas por  $\mathbf{f}$ , a qual pode ser integrada usando qualquer procedimento de integração numérica para dar a primeira derivada  $r(x)$ .

### 5.1.2 Validação Cruzada Generalizada

A validação cruzada generalizada (Golub, Heath e Wahba 1979) é um processo geral que pode ser aplicado para estimar parâmetros de ajustes em uma grande variedade de

problemas. A idéia por trás dessa técnica é de reciclar dados alternando os papéis de amostra de treino e de teste. Para aplicar a validação cruzada, seguimos os seguintes passos: primeiro particionamos o conjunto de dados em subconjuntos mutuamente exclusivos, e em seguida, usamos alguns desses subconjuntos (dados de treinamento) para estimar o parâmetro de regularização  $\lambda$ . O restante dos subconjuntos, os dados de teste, são usados para validar o modelo.

Existe algumas variações na forma de realizar o particionamento dos dados, o método aqui usado é o deixando um de fora (*leaving-one-out*). A idéia básica desse método consiste em: para um dado  $\lambda$  o conjunto de treinamento original é dividido em  $n$  subconjuntos, em que  $n$  é igual ao número de dados pertencentes ao conjunto de treinamento. Destes  $n$  subconjuntos, um subconjunto é retirado na validação de  $\lambda$ , e os  $n - 1$  subconjuntos restantes são utilizados no treinamento. Repetimos o processo  $n$  vezes, de modo que cada um dos  $n$  subconjuntos sejam utilizados exatamente uma vez, como dado de teste.

Seguindo o princípio *leaving-one-out*,  $\lambda_{opt}$  é o minimizador do critério de validação cruzada (Cross Validation - CV), que iremos definir a seguir.

Seja  $\mathbf{y}_{-i}$  o vetor com a  $i$ -ésima observação removida de  $\mathbf{y}^M$ , e  $y_{-i}^C$  a estimativa baseada em  $\mathbf{y}_{-i}$ , o critério de validação cruzada (CV) é definido por:

$$CV(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i^M - y_{-i}^C)^2 \quad (5.7)$$

Lembremos que  $\mathbf{y}^C = \mathbf{B}\mathbf{f}$ , substituindo o valor de  $\mathbf{f}$  dado pela equação (5.6), temos

$$\mathbf{y}^C = \mathbf{B} \left( \mathbf{B}^T \mathbf{B} + \frac{\lambda}{\Delta^4} \beta^T \beta \right)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{y}^M.$$

Definimos a matriz de influência dada por

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \left( \mathbf{B}^T \mathbf{B} + \frac{\lambda}{\Delta^4} \beta^T \beta \right)^{-1} \mathbf{B}^T \quad (5.8)$$

Dessa forma, as estimativas dadas por  $\mathbf{y}^C$  encontradas no processo de suavização,

dependem linearmente de  $\mathbf{y}^M$  através da equação

$$\mathbf{y}^C = \mathbf{A}\mathbf{y}^M \quad (5.9)$$

Podemos obter outra forma para o  $CV(\lambda)$ , baseando-se em um lema apresentado por Craven e Wahba (1979), que produz a seguinte identidade:

$$y_i^M - y_i^C = \frac{y_i^M - y_i^C}{1 - A_{ii}} \quad (5.10)$$

onde  $A_{ii}$  é o  $i$ -ésimo valor da diagonal da matriz  $\mathbf{A}$ .

Então o  $CV(\lambda)$  reduz-se a:

$$CV(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_i^M - y_i^C}{1 - A_{ii}} \right)^2 \quad (5.11)$$

Substituindo  $A_{ii}$  pela média de todos os elementos da diagonal de  $\mathbf{A}$ , obtemos o critério de validação cruzada generalizada (Generalized Cross Validation - GCV):

$$GCV(\lambda) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i^M - y_i^C)^2}{(1 - Tr[\mathbf{A}]/n)^2} \quad (5.12)$$

ou em notação matricial

$$GCV(\lambda) = \frac{(\mathbf{y}^M - \mathbf{y}^C)^T (\mathbf{y}^M - \mathbf{y}^C) / n}{(1 - Tr[\mathbf{A}]/n)^2} \quad (5.13)$$

Neste capítulo apresentamos os resultados do método de diferenciação numérica de dados experimentais exposto nessa dissertação. A confiabilidade e generalidade do método de diferenciação descrito no capítulo 5, será demonstrado através de sua aplicação a conjuntos de dados de crescimento. Com exceção da primeira aplicação, todos os outros conjuntos são de dados já publicados. O ajuste para a curva de crescimento, dados pelos valores calculados  $y^C(x)$ , serão confrontados com os ajustes gerados pelos modelos dados nos trabalhos de origem. As derivadas dadas pela equação (5.6), serão integradas obtendo assim uma curva para a primeira derivada, a partir da qual faremos uma estimativa para a taxa média de crescimento de cada espécie.

## 6.1 Dados sintéticos

Para esta aplicação, iremos simular um conjunto de medidas experimentais

$$(x_1^M, y_1^M), \dots, (x_i^M, y_i^M), \dots, (x_n^M, y_n^M)$$

descritos pela função  $y(x) = -3[1 - \exp(-x/2)]\cos(x)$ . Nesse conjunto de dados temos  $n = 34$ , e os dados encontram-se uniformemente distribuídos no intervalo  $[0.5, 3.8]$ , espaçados

pela distância  $\Delta = 0.1$ . O propósito desse exemplo é permitir que as derivadas dadas pela equação (5.6), possam ser comparadas com as derivadas exatas, dadas por:

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = \frac{3}{4}\exp(-x/2)\cos(x) + 3[1 - \exp(-x/2)]\cos(x) + 3\exp(-x/2)\sin(x)$$

e

$$\frac{dy(x)}{dx} = -\frac{3}{2}\exp(-x/2)\cos(x) + 3[1 - \exp(-x/2)]\sin(x)$$

Os valores  $y^C(x)$  calculados serão comparados com a função original.

A Figura 6.1 mostra os gráficos para os valores de  $y(x)$  exatos e os valores calculados  $y^C(x)$ . A segunda derivada dada pela equação (5.6) é mostrada como uma curva contínua na Figura 6.3. Para esse cálculo, tomamos  $k = 151$ . Este valor de  $k$  permite plotar os valores para a segunda derivada, como uma curva contínua. A curva para a primeira derivada é obtida integrando numericamente os valores da segunda derivada, e mostrado na Figura 6.2.

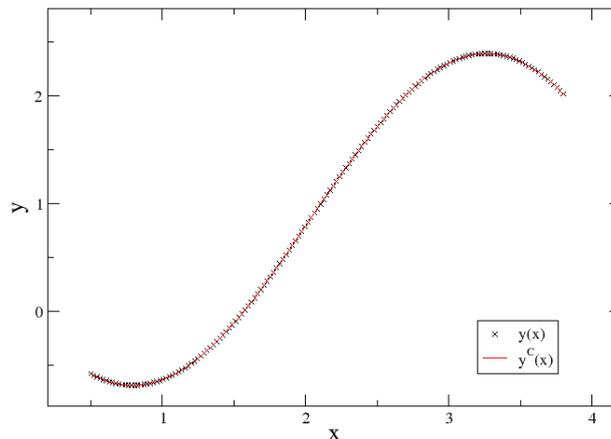


Figura 6.1: Gráfico das curvas  $y(x) \times y^C(x)$ . A curva em preto é referente aos dados de  $y(x)$ , e a curva em vermelho é referente aos dados de  $y^C(x)$ .

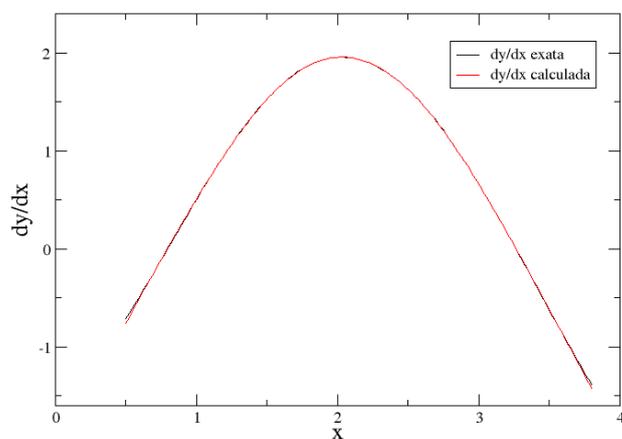


Figura 6.2: Gráfico da derivada  $dy/dx$ . A curva em preto é da derivada exata  $dy/dx$ , e a curva em vermelho é da aproximação fornecida pela equação (5.6).

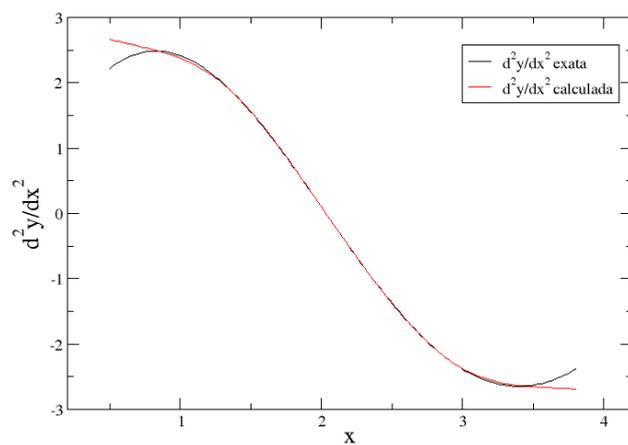


Figura 6.3: Gráfico da derivada segunda  $d^2y/dx^2$ . A curva em preto é da derivada exata  $d^2y/dx^2$ , e a curva em vermelho é da aproximação fornecida pela equação (5.6).

Para esses dados, o  $\lambda_{opt}$  fornecido pela Validação Cruzada Generalizada (GCV) teve como valor  $\lambda = 1$ . Experimentação numérica indica que pequenas variações no valor do  $\lambda$  não tem efeito significativo no valor dado para as segunda derivadas.

Como podemos observar na Figura 6.1, os valores calculados de  $y^C(x)$  estão estreitamente próximos dos valores originais  $y(x)$ . Com base na Figura 6.3 podemos ver que a equação (5.6), fornece uma aproximação bastante confiável para as segundas derivadas. A causa do erro ser mais significativo nas extremidades da segunda derivada, é devido ao fato quando fizemos  $d^2f(x)/dx^2 = 0$  nos pontos inicial e final de discretização (Lubansk et al, 2006). Uma forma de eliminar essa diferença, seria adaptar o método, a fim de que o mesmo fornecesse as derivadas de terceira ordem, e daí então integrá-las para obter as derivadas de segunda ordem. Note como a curva para a derivada de primeira ordem, dada na Figura 6.2, não tem essa diferença nas extremidades, pois a mesma é obtida integrando numericamente a curva da segunda derivada. Como em nossas análises iremos utilizar a curva da primeira derivada, essa diferença na segunda derivada não irá influenciar em nossos resultados.

## 6.2 Estimação de idade e crescimento de *Mugil curema*

Os Mugilídeos estão distribuídos em áreas tropicais e subtropicais de todo o mundo, sobretudo em regiões costeiras e estuarinas (Menezes 1983). No Brasil, os mugilídeos são geralmente chamados de 'tainha' - um grupo de 7 espécies de grande valor (*Mugil platanus*, *M. curema*, *M. liza*, *M. gaimardianus*, *M. incilis*, *M. trichodon* e *M. curvidens*) que produz cerca de 2,8% do peso total das capturas desembarcadas no Brasil e 5,2% do total de capturas na região nordeste do país (IBAMA 2006 apud Santana et al., 2009). A tainha branca *M. curema* ocorre no Oceano Atlântico dos Estados Unidos à Argentina (Menezes 1983) e é a espécie Mugilidae mais abundantes no nordeste do Brasil. Os grandes cardumes de mugilídeos migram de seus ambientes de alimentação nos rios, estuários, lagos e lagoas até o mar para desovar e têm um ciclo de desova por cada estação. Os períodos

de desova se diferenciam segundo a espécie e regiões (Maitland e Campbell, 1992). São espécies de muita importância comercial e são altamente exploradas ao longo de toda sua distribuição (Cervigón et al., 1993 apud Ramirez, 2011).

Idade e crescimento de tainha branca do Atlântico ocidental foi estimado nos Estados Unidos, México, Cuba e Venezuela a partir de anéis periódicas de espinhos dorsal, escamas e otólitos (Richards e Castagna 1976), (Alvarez-Lajonchere, 1981), (Ibáñez-Aguirre et al., 1995, 1999), (Gallardo-Cabello et al., 2005), conduzindo a parâmetros de crescimento desiguais.

Santana et al. (2009) realizaram análise de crescimento baseada em micro e macro-estruturas de otólitos da espécie *Mugil curema* (tainha-branca), a fim de identificar as possíveis causas de diferenças na estimação dos parâmetros de modelos de crescimento. Nesse estudo, amostras de tainha foram coletadas a partir de desembarques de frota artesanal no estado de Pernambuco, entre novembro de 2003 e dezembro de 2006. Um total de 521 otólitos foram extraídos de peixes entre 1.3 e 35.6 cm de comprimento furcal.

De acordo com o estudo, não houve diferença significativa entre os sexos, assim, ambos os sexos foram agrupados para a estimativa de crescimento. Na Tabela 6.1, apresentam-se os dados médios de tamanho por idade retrocalculados para ambos os sexos da Tainha branca.

Tabela 6.1: Média e desvio padrão de idade-comprimento retrocalculados para ambos os sexos de *Mugil curema* (Fonte: Santana et al., 2009,).

Idade (ano)	Comprimento Furcal (cm)	Desvio padrão (cm)
0,17	3,51	0,17
0,61	9,75	0,40
1	16,46	0,77
2	21,34	1,12
3	25,00	1,30
4	27,73	1,44
5	30,13	1,30
6	32,55	1,52
7	34,85	1,97
8	36,35	2,03
9	38,40	-
10	38,70	-
11	39,02	0,49

Santana et al. (2009), ajustaram o modelo de crescimento de von Bertalanffy para descrever a correlação entre comprimento e idade. Usando microestruturas diárias e macroestruturas anuais, a função de von Bertalanffy forneceu os seguintes parâmetros:  $L_\infty = 34,4$  cm;  $k = 0,365$  e  $t_0 = -0,311$  ano.

Aplicamos o método de diferenciação numérica de dados descrito no capítulo 5, aos dados de comprimento-idade da Tainha, e, a partir da equação (5.5), estimamos os comprimentos  $L(t)$ , e, com a equação (5.6), estimamos valores para as derivadas  $dL(t)/dt$ .

Como vimos no capítulo 3, no modelo de von Bertalanffy, a equação diferencial que descreve a taxa de crescimento com a idade, é dada por

$$\frac{dL(t)}{dt} = k(L_\infty - L(t)) \quad \text{com } L_\infty > 0, k > 0. \quad (6.1)$$

Fizemos regressão linear para a equação (6.1), entre os valores estimados de  $L(t)$  e  $dL(t)/dt$ , afim de estimar os parâmetros  $k$  e  $L_\infty$ . A regressão resultou nos seguintes valores:  $k = 0,378$  e  $L_\infty = 34,62$  cm. Estes valores estão próximos com os valores estimados por Santana et al. (2009).

Plotamos o gráfico com a curva de crescimento para os dados de comprimento-idade da tainha com os ajustes fornecidos pelo método de diferenciação de dados e pelo modelo de von Bertalanffy. A Figura 6.4 mostra o ajuste fornecido pelos dois métodos com duas curvas contínuas. A curva em azul é referente ao ajuste fornecido pelo modelo de von Bertalanffy, a curva em vermelho refere-se ao ajuste fornecido pelos valores calculados  $L(t)$ , dados pela equação (5.5) usando o método de diferenciação numérica. A taxa de crescimento  $dL(t)/dt$  dada integrando numericamente a equação (5.6), é mostrada como uma curva contínua na Figura 6.5.

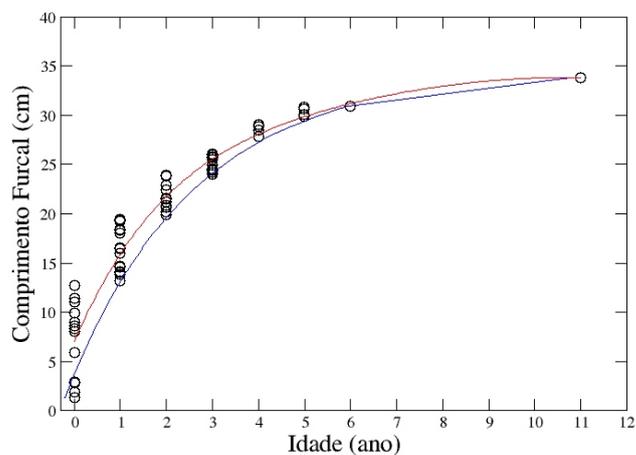


Figura 6.4: Curva de crescimento *Mugil curema*. Curva em azul: ajuste fornecido pelo modelo de von Bertalanffy; curva em vermelho: ajuste fornecido pelo método de diferenciação numérica.

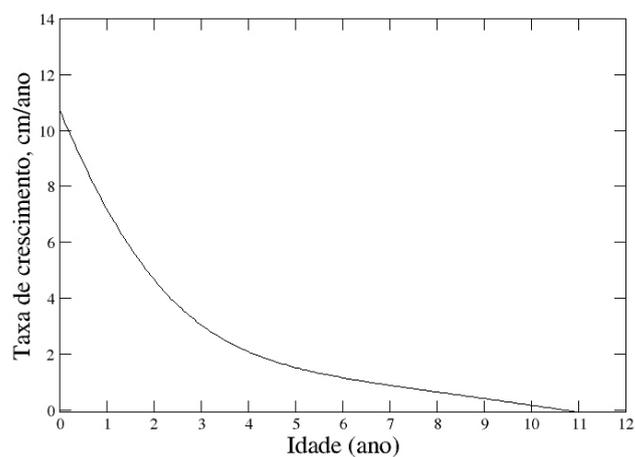


Figura 6.5: Curva da taxa de crescimento em cm/ano, da espécie *Mugil curema*, estimada a partir da equação (5.6).

A partir da curva para a taxa de crescimento dada pela Figura 6.5, estimamos uma taxa de crescimento média relativa aos dados de todo o período de crescimento. Para essa estimativa, usamos o teorema da média, o qual diz que: Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua, existe  $c \in [a, b]$  tal que  $f(c) = f_{med}$ , ou seja,

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Então, a taxa de crescimento média é dada por:

$$\bar{k} = \frac{1}{x_n - x_0} \int_{x_0}^{x_n} f(x_i) dx_i \quad (6.2)$$

onde  $x_0$  e  $x_n$  são respectivamente as idades inicial e final, e  $f$  seria a função para a curva taxa de crescimento.

Com os dados da curva da Figura 6.5 e com a expressão dada por (6.2), calculamos a taxa de crescimento média  $\bar{k}$  do mugil curema, obtendo o valor  $\bar{k} = 2.0$  cm/ano. Ressaltamos que a medida  $\bar{k}$  aqui descrito não tem relação com o parâmetro  $k$  dos modelos de crescimento. Essa medida proposta tem embasamento teórico matemático, apesar de que no contexto aqui inserido admite interpretação biológica.

### 6.3 Estimação de idade e crescimento de *Thunnus obesus*

*Thunnus obesus* (Lowe, 1839), conhecida comercialmente por albacora-bandolim ou atum-patuto, é uma espécie epi e mesopelágica, ocorre em águas tropicais e temperadas e habita as águas dos oceanos Atlântico, Pacífico e Índico, e no mar Mediterrâneo. No Oceano Atlântico, pode ser encontrado entre as latitudes 40° N e 40° S (Miyake, 1990). De acordo com a última avaliação realizada pela Comissão Internacional para a Conservação dos Tunídeos do Atlântico (ICCAT, 2010), essa espécie está sendo atualmente capturada perto do rendimento máximo sustentável e está ameaçada como vulnerável pela Lista

Vermelha da IUCN (Collette et al., 2011 apud Duarte-Neto, Higa e Lessa, 2012). É uma espécie altamente valorizada e uma das espécies mais valiosas para o mercado asiático, onde é consumido fresco como sashimi (Hanamoto, 1987) e (Sun et al., 2001).

A área de desova localiza-se em águas tropicais: no Pacífico oriental, de 10°N a 10°S, e no Atlântico, de 15°N a 15°S (Collette e Nauen, 1983). No Oceano Atlântico, a maior área de crescimento conhecida para essa espécie situa-se no Golfo da Guiné, onde jovens formam grandes cardumes próximo à superfície, geralmente misturando-se com outras espécies da mesma família (Miyake, 1990 apud Fagubdes, Arfelli e Amorim, 2001).

Baseado em informações genéticas e recaptura de marcação, é aceito que esta espécie compreende um estoque único no oceano Atlântico, com diferentes fatores ambientais na área de distribuição contribuindo para diferenças em parâmetros populacionais (Chow et al., 2000), (Durand et al., 2005) e (Gonzalez et al., 2008). Informações de idade e crescimento representa a base de vários métodos aplicados para avaliar os recursos pesqueiros, desde taxas de crescimento e mortalidade a métodos mais complexos como análise virtual populacional (Campana, 2001).

Duarte-Neto, Higa e Lessa (2012), conduziram estudo a fim de fornecer a primeira informação sobre idade e crescimento de *Thunnus obesus*, capturado no Atlântico sudoeste equatorial, usando espinhos dorsais, uma abordagem que tem sido utilizada com sucesso na determinação de idade de espécies de atuns. O estudo foi conduzido usando uma inferência de multi-modelos baseada na teoria de informação avaliada para dados de comprimento por idade retrocalculados e observados.

Para esse estudo, as amostras foram coletadas na cidade de Natal, no estado do Rio Grande do Norte, Brasil, de fevereiro de 1999 a janeiro de 2000, provenientes de embarcações comerciais e também prospecções, cujo objetivo foi prover informações sobre a Zona Econômica Exclusiva (ZEE) na área do entorno do Arquipélago de São Pedro e São Paulo.

Seções da espinha foram retirados de 523 indivíduos medindo entre 50,0 e 179,0 centímetros de comprimento furcal, mostrando de um a três anéis completos em cada secção com uma área absorvida bem desenvolvida.

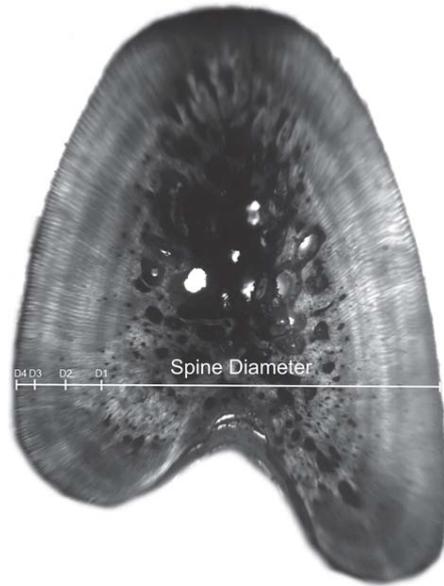


Figura 6.6: Secção transversal da primeira espinha dorsal de *T. obesus* (128 cm) mostrando os diâmetros da coluna e de anel (Fonte: Duarte-Neto, Higa e Lessa, 2012, p. 151).

Nesse estudo foram ajustados os modelos de crescimento de von Bertalanffy, Gompertz, Logístico e Richards. Todos os modelos foram ajustados para dados de comprimento-idade observados e retrocalculados, usando estimação por mínimos quadrados não-linear. Na tabela 6.3, apresenta-se os dados médios de tamanho por idade retrocalculados e observados de *Thunnus obesus*. A estimação de parâmetros em todos os modelos usando dados de comprimento-idade retrocalculados, foi mais consistente do que usando dados observados (Tabela 6.2). O modelo de Von Bertalanffy mostrou ser o melhor ajuste. Os modelos de Richards e Gompertz também foram considerados adequados para *Thunnus obesus*, e, desta forma, um modelo médio foi estimado, o comprimento assintótico do modelo médio, calculado com base nesses três modelos selecionados, foi  $\overline{L_\infty} = 226,25$  cm.

Aplicamos o método de diferenciação numérica aos dados de comprimento-idade retrocalculados de *Thunnus obesus*, estimamos valores para  $L(t)$  e para as derivadas  $dL(t)/dt$ , e novamente fizemos regressão linear para a equação (6.1) entre os valores de  $L(t)$  e  $dL(t)/dt$ , e estimamos os valores de  $k$  e  $L_\infty$ , chegando aos seguintes valores:  $k = 0,157$  e  $L_\infty = 227,1$  cm. Note como o valor para  $k$  estimado está estreitamente próximo do valor

de  $k$  do modelo de von Bertalanffy (considerado o melhor ajuste); da mesma forma, o valor para o comprimento assintótico está de acordo com o comprimento assintótico  $\overline{L_\infty}$  do modelo médio.

Tabela 6.2: Parâmetros de crescimento com correspondente erro padrão para cada modelo usando dados de comprimento-idade retrocalculados e observados.  $m_1 =$  von Bertalanffy,  $m_2 =$  Gompertz,  $m_3 =$  Logístico e  $m_4 =$  Richards (Fonte: Duarte-Neto, Higa e Lessa, 2012, p. 154).

Dados	Parâmetro	Modelo	Valor do parâmetro	Erro padrão	
Retrocalculados	$L_\infty$	$m_1$	236,78	12,18	
		$m_2$	194,73	5,24	
		$m_3$	179,61	3,54	
		$m_4$	221,11	24,24	
	$k$	$m_1$	0,15	0,014	
		$m_2$	0,31	0,016	
		$m_3$	0,46	0,018	
		$m_4$	0,18	0,068	
	$t_0$	$m_1$	-0,90	0,11	
		$m_2$	1,55	0,078	
		$m_3$	2,40	0,088	
		$m_4$	0,047	1,31	
	$r$	$m_4$	-0,76	0,41	
	Observados	$L_\infty$	$m_1$	256,10	22,87
			$m_2$	208,32	9,32
			$m_3$	191,03	6,027
$m_4$			196,96	16,70	
$k$		$m_1$	0,12	0,021	
		$m_2$	0,26	0,022	
		$m_3$	0,39	0,024	
		$m_4$	0,33	0,85	
$t_0$		$m_1$	-1,083	0,23	
		$m_2$	1,81	0,15	
		$m_3$	2,79	0,16	
		$m_4$	2,45	0,85	
$r$		$m_4$	0,57	0,94	

Tabela 6.3: Média e desvio padrão de comprimento-idade retrocalculados e observados de *T. obesus* (Fonte: Duarte-Neto, Higa e Lessa, 2012, p. 153).

Dados	Idade (ano)	Comprimento Furcal (cm)	Desvio padrão (cm)
Retrocalculados	1	53,3	7,1
	2	85,0	7,7
	3	102,6	7,2
	4	119,0	7,2
	5	133,2	5,2
	6	147,1	5,9
	7	160,9	7,0
	8	170,3	2,9
	9	177,5	2,1
Observados	1	73,2	8,4
	2	92,7	11,1
	3	109,8	11,3
	4	129,6	9,6
	5	143,7	6,0
	6	155,9	6,9
	7	167,5	5,1
	8	173,8	1,0
	9	177,5	2,1

Plotamos o gráfico com a curva de crescimento para os dados de comprimento-idade retro-calculados de *Thunnus obesus* com os ajustes fornecidos pelo método de diferenciação de dados e pelos modelos von Bertalanffy, Gomperts, Logístico e Richards, ajustados por Duarte-Neto, Higa e Lessa. A Figura 6.7 mostra o ajuste fornecido pelo método de diferenciação numérica e pelo modelo de von Bertalanffy, considerado o melhor ajuste. Notemos como as curvas estão quase sobrepostas. As Figuras 6.8, 6.9 e 6.10 mostra os ajustes fornecidos pelo método de diferenciação numérica e pelos modelos Gompertz, Logístico e Richards, respectivamente. A Figura 6.11 mostra a taxa de crescimento  $dL(t)/dt$  em função da idade como uma curva contínua.

Calculamos a taxa média de crescimento  $\bar{k}$  do *Thunnus obesus* dada pela equação (6.2), descrita na seção anterior, com os valores fornecidos pela curva da Figura 6.11 e obtivemos como valor  $\bar{k} = 13,61$  cm/ano.

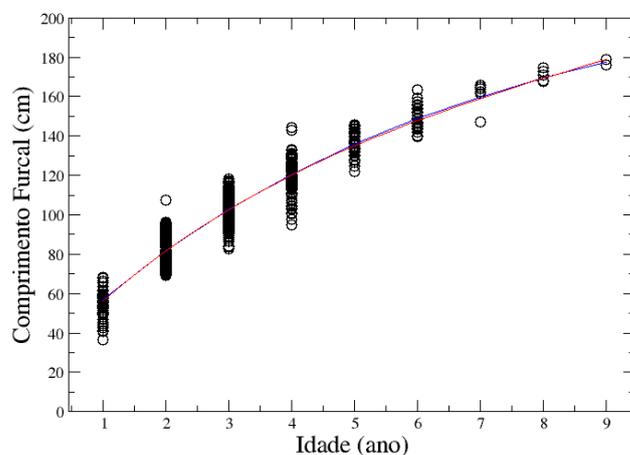


Figura 6.7: Curva de crescimento *Thunnus obesus*. Curva em azul: ajuste fornecido pelo modelo de von Bertalanffy; curva em vermelho: ajuste fornecido pelo método de diferenciação numérica.

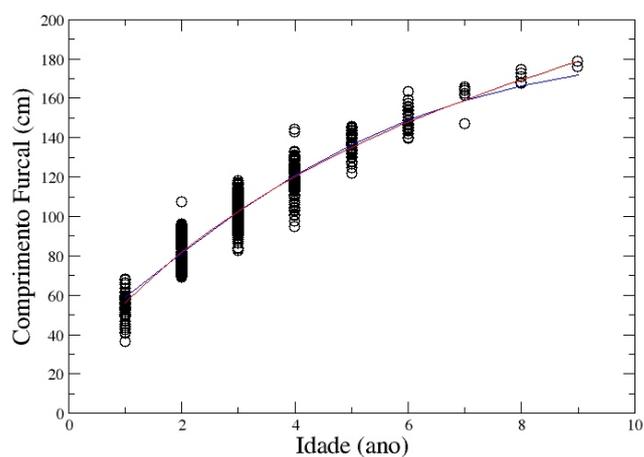


Figura 6.8: Curva de crescimento *Thunnus obesus*. Curva em azul: ajuste fornecido pelo modelo Gompertz; curva em vermelho: ajuste fornecido pelo método de diferenciação numérica.

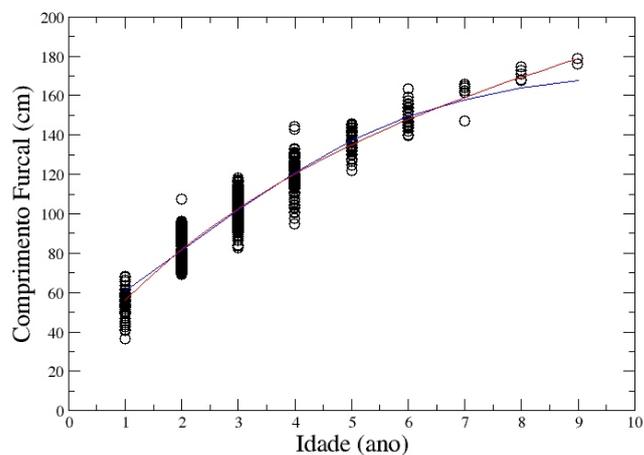


Figura 6.9: Curva de crescimento *Thunnus obesus*. Curva em azul: ajuste fornecido pelo modelo Logístico; curva em vermelho: ajuste fornecido pelo método de diferenciação numérica.

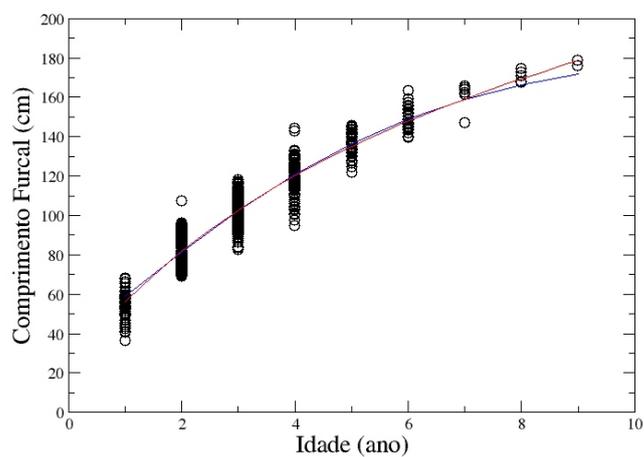


Figura 6.10: Curva de crescimento *Thunnus obesus*. Curva em azul: ajuste fornecido pelo modelo Richards; curva em vermelho: ajuste fornecido pelo método de diferenciação numérica.

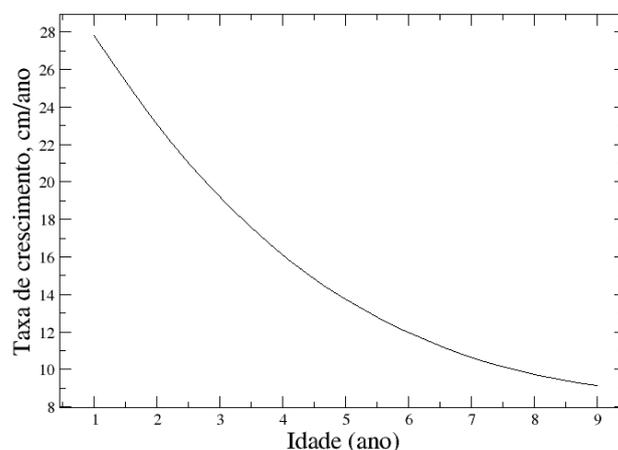


Figura 6.11: Curva da taxa de crescimento em cm/ano, da espécie *Thunnus obesus*, estimada a partir da equação (5.6).

## 6.4 Estimação de idade e crescimento de *Pseudupeneus maculatus*

O Saramunete, *P. maculatus* pertence a uma família numericamente pequena, apresentando 6 gêneros: *Mulloidichthys* ou *Muloides*, *Mullus*, *Parupeneus*, *Pseudupeneus*, *Upeneichthys* e *Upeneus*, com aproximadamente 55 espécies (Nelson, 1994). Os estoques de Saramunete vêm sendo explorados em regiões costeiras de recifes de coral, constitui um recurso pesqueiro emergente de grande importância econômica, esta espécie é comercializada no mercado internacional em que existe expressiva demanda de países como Estados Unidos e França (Campos e Oliverira, 2001).

O saramunete apresenta coloração variada, de acordo com seu hábito, quando ativos, investigando o substrato, apresentam três manchas retangulares escuras grandes ao longo da linha lateral com o colorido geral acinzentado claro e, quando em repouso, sua coloração apresenta-se avermelhada com manchas amareladas nas margens das escamas e linhas diagonais azuladas na cabeça (Humann, 1994).

Habitam águas rasas com profundidades inferiores a 90 m, em áreas com fundos rochosos e coralinos, bolsões de areia e cascalho ou bancos de algas próximos da costa

de ilhas oceânicas (Carvalho-Filho, 1994). Apresentam ampla distribuição geográfica, estendendo-se do Atlântico Ocidental; Bermudas, Nova Jersey ?Estados Unidos, Golfo do México, Bahamas, Barbados, Porto Rico, Cuba, Jamaica e Brasil ao Oceano Pacífico e Índico (Cervigón, 1993).

Estimação de idade e comprimento para o *Pseudupeneus maculatus* foi feita em estudo conduzido por Santana, Morize e Lessa (2006), tal trabalho objetivou forçar a curva de crescimento desta espécie a partir da leitura de otólitos por meio da análise de anéis e microincrementos. Devido o aumento dos esforços de pesca com a diminuição na CPUE (captura por unidade de esforço) nos últimos anos, informações sobre idade e crescimento são necessárias para o provimento de métodos a serem utilizados para a gestão da espécie.

Uma amostra composta por 4.973 exemplares do *Pseudupeneus maculatus* foi coletada de embarcações no estado de Pernambuco, nordeste do Brasil, entre 1999 e 2002. Uma primeira análise da razão do incremento marginal médio mensal sugeriu que um anel é formado anualmente entre maio e junho.

Da amostra total foram removidos 398 otólitos de indivíduos medindo entre 4,5 e 29,2 centímetros de comprimento. Para essa amostra, não houve diferença significativa entre sexos. Nesse estudo foi ajustado o modelo de crescimento de von Bertalanffy para descrever a correlação entre comprimento e idade. A função de von Bertalanffy forneceu os seguintes parâmetros:  $L_{\infty} = 33,23$  cm;  $k = 0,265$  e  $t_0 = 0,0883$  ano. As idades correspondentes ao primeiro comprimento e maturidade para o tamanho no recrutamento de pesca foram estimados através da curva de crescimento de von Bertalanffy invertida, para a comparação do crescimento estimado para a espécie em estudo com outros da família Mullidae.

O método de diferenciação numérica foi aplicado aos dados de comprimento-idade de *Pseudupeneus maculatus*, a fim de estimar os valores para o comprimento  $L(t)$  e para as derivadas  $dL(t)/dt$ , fizemos regressão linear com esses valores para a equação (6.1) e estimamos valores para os parâmetros  $k$  e  $L_{\infty}$ . Obtendo os seguintes valores:  $k = 0,334$  e  $L_{\infty} = 34,233$  cm. O valor estimado para  $L_{\infty}$  está de acordo com o valor estimado para

a função de von Bertalanffy, no entanto, o valor do parâmetro  $k$  apresentou diferença significativa.

O gráfico com a curva de crescimento para os dados de comprimento-idade de *Pseudupeneus maculatus* foi plotado com os ajustes fornecidos pelo método de diferenciação numérica de dados e pelo modelo de von Bertalanffy. A Figura 6.12 mostra o ajuste fornecido pelos dois métodos com duas curvas contínuas. A curva em azul é referente ao ajuste fornecido pelo modelo de von Bertalanffy; a curva em vermelho refere-se ao ajuste fornecido pelo método de diferenciação numérica. A taxa de crescimento  $dL(t)/dt$  em função da idade, é mostrada como uma curva contínua na Figura 6.13.

A taxa média de crescimento  $\bar{k}$  do *Pseudupeneus maculatus* dada pela equação (6.2), calculada com os valores fornecidos pela curva da Figura 6.10 foi  $\bar{k} = 5,64$  cm/ano.

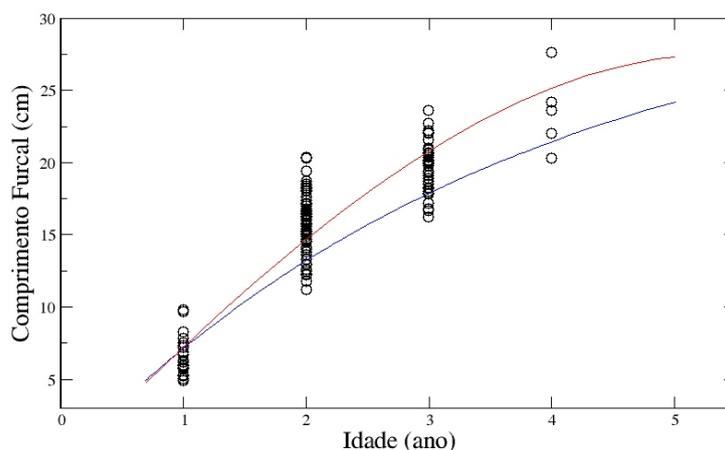


Figura 6.12: Curva de crescimento *Pseudupeneus maculatus*. Curva em azul: ajuste fornecido pelo modelo de von Bertalanffy; curva em vermelho: ajuste fornecido pelo método de diferenciação numérica.

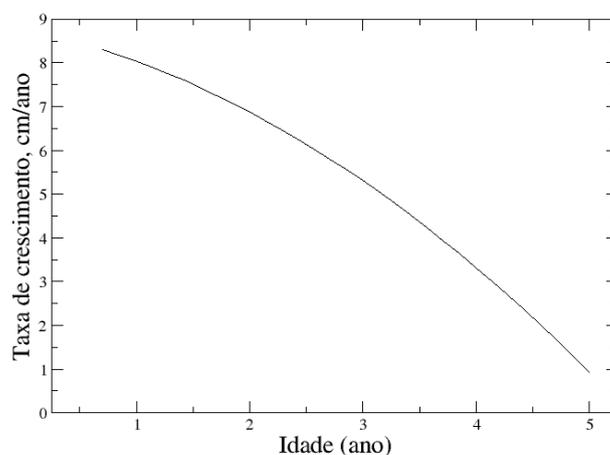


Figura 6.13: Curva taxa de crescimento, em cm/ano, da espécie *Pseudupeneus maculatus*.

## 6.5 Discussão

A equação (5.6) descrita no capítulo 5, converte dados experimentais em segundas derivadas, esse processo de conversão pode parecer matematicamente robusto, no entanto, a aplicação da equação (5.6) é relativamente simples e a implementação desse procedimento pode ser feito em qualquer linguagem de programação. Neste trabalho usamos a linguagem de programação C.

O desenvolvimento tecnológico tem possibilitado a utilização de metodologias mais sofisticadas na avaliação de dados longitudinais como as curvas de crescimento. A utilização de modelos não lineares consagrados, como Gompertz, Brody, von Bertalanffy e Logístico, tem a vantagem de resumir em poucos parâmetros informações do desenvolvimento ponderal dos animais. O conhecimento desses parâmetros pode fornecer subsídios para alterar a forma da curva de crescimento dos animais sem requerer grandes recursos computacionais, e demandando pouco tempo de análise. Por outro lado, deixam de detalhar minúcias entre cada período (dia) do crescimento animal (Tholon e Queiroz, 2009).

A aplicação da metodologia de diferenciação numérica aplicada a estudos de crescimento é favorável pelo fato de poder estimar uma taxa de crescimento média de dado

período de tempo considerado, como também a taxa de crescimento instantânea em dado momento. Apesar de neste estudo termos trabalhado apenas com espécies de peixes, como essa metodologia é independente de modelo de crescimento, pode ser empregada em outras espécies animais, esse mote é uma perspectiva de trabalhos futuros.

Na aplicação para dados sintéticos vimos que essa metodologia aproxima com precisão as curvas da primeira e segunda derivada, dadas respectivamente pelas Figuras 6.2 e 6.3. E ainda fornece uma aproximação suave para a curva dos dados experimentais dada na Figura 6.1, este fato possibilita essa metodologia ser usada para a suavização de dados.

Aplicar essa metodologia a dados de crescimento de peixes de trabalhos já publicados foi cômodo pois permitiu comparar os resultados obtidos por essa metodologia, com os resultados obtidos pelos modelos de crescimento. Em suma, o objetivo deste trabalho não é sobrepor-se aos modelos de crescimento, haja vista que o estudo do crescimento animal via modelos de crescimento tem tradição histórica de sucesso. Nosso objetivo foi propor uma metodologia alternativa aos estudos de crescimento.

Além das aplicações descritas nesse trabalho essa metodologia vem sendo aplicada com relativo sucesso a outras situações onde é requerida a diferenciação de dados experimentais ruidosos (Lubansk et al. 2006) e (Nascimento, 2014).

Para deduzir a equação (5.6) não foi requerido hipótese sobre a forma funcional dos dados. Essa característica é importante pois permite trabalhar com dados experimentais distribuídos não uniformemente. Uma outra vantagem dessa metodologia é que além de ser usada para fornecer as derivadas de dados experimentais, também suaviza o ruído inerente a dados experimentais.

O processo de regularização de Tikhonov empregado nessa metodologia lida com um com o parâmetro de regularização  $\lambda$ , o qual equilibra as condições de suavidade e precisão dos resultados, um ponto importante é escolher o  $\lambda$  apropriado. Além da Validação Cruzada Generalizada - GCV para a escolha do  $\lambda$  apropriado existem outros métodos de escolha do  $\lambda_{opt}$ . É relevante reiterar que as derivadas fornecidas pela equação (5.6) não são muito sensíveis a pequenas variações do parâmetro de regularização em torno do  $\lambda_{opt}$ .

Dessa forma um ajuste rigorosamente preciso não é relevante (Lubansk et al. 2006).

---

### Conclusões e Trabalhos Futuros

---

A conjectura atual do desenvolvimento tecnológico tem possibilitado a utilização de metodologias cada vez mais sofisticadas na avaliação de dados longitudinais, como as curvas de crescimento. O desenvolvimento de estudos nessa vertente vem incitando a necessidade de ferramentas mais precisas na investigação de metodologias para a produção animal.

O objetivo deste trabalho foi propor uma metodologia alternativa no estudo de crescimento de peixes, tal metodologia visa a estimação da curva de crescimento, independente de modelo e de estimação de parâmetros. Apesar de que, em nossas análises, fizemos a estimação dos parâmetros de crescimento a título de comparação com os dados já existentes. Fizemos o ajuste da curva de crescimento de três espécies de peixes de estudos já publicados, dispostos na literatura. Analisamos os dados de crescimento para as espécies *Mugil curema*, *Thunnus obesus* e *Pseudupeneus maculatus*.

Essa abordagem metodológica visa a diferenciação de dados experimentais baseada no método de regularização de Tikhonov, tal procedimento fornece um método simples e confiável para fornecer a derivada de dados experimentais. O processo é independente da natureza dos dados e pode lidar com pontos de dados não uniformemente distribuídos. O método pode ser estendido para derivadas de ordem mais altas e também pode ser usado

para suavizar dados experimentais.

Resultados mostram evidências de que o procedimento aqui empregado aproxima com precisão as curvas da primeira e segunda derivada. Tais curvas forneceram subsídios para propor uma medida para a taxa de crescimento média de cada espécie analisada. As curvas de crescimento fornecidas por essa metodologia estão de acordo aceitável com as curvas de crescimento dadas pelos modelos de crescimento.

Como complemento e estudos futuros a este trabalho, objetiva-se aplicar essa metodologia em outras espécies animais, principalmente em espécies que têm dificuldades em ser ajustadas pelos modelos de crescimento existentes na literatura, haja vista que essa metodologia independe de modelo de crescimento. Da mesma forma, além do estudo de crescimento animal, pretendemos aplicar essa metodologia em outros fenômenos de interesses físicos e biológicos.

- [1] ALIFANOV, O. M. e RUMJANCEV, S. V. **On the stability of iterative methods for the solution of linear ill-posed problems**, Soviet Mathematics Doklady, v. 20, p. 1133-1136, 1979.
- [2] ALVES, R. G. O. **Estudo genético de características reprodutivas em suínos e avaliação de curvas de crescimento em cruzamentos dialélicos**. Tese - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 1986.
- [3] ANDERSSON, R. S.; HELGLAND, M. **For Numerical differentiation dimensionality can be a blessing!** Math. Comp. 68, n. 227, p. 1121-1141, 1999.
- [4] BARBIERI, G.; BARBIERI, M.C. **Growth and first sexual maturation size of *Gymnotus carapo* (Linnaeus, 1758) in the Lobo reservoir (state of São Paulo, Brazil) (Pisces, Gymnotidae)**. Rev. Hydrobiol. Trop., v. 16, n. 2, p. 195-201, 1983.
- [5] BASSON, M., ROSENBERG, A.A. BEDDINGTON, J.R. **The accuracy and reliability of two new methods for estimating growth parameters from length-frequency data**. J. Cons. Int. Explor. Mer. v. 44, p. 277-285, 1988.
- [6] BAZAN, F. S. V. **Fixed-point iterations in determining the Tikhonov regularization parameter**. Inverse Problems, Vol. 24, 2008.

- [7] BERTALANFFY, L. von. **Quantitative laws in metabolism and growth.** The Quarterly Review of Biology , v. 32, p. 217-230, 1957.
- [8] BEVERTON, R.J.H.; HOLT, S.J. **On the dynamics of exploited fish populations.** London Glasgow: Chapman Hall, p. 533, 1993.
- [9] BIRCH, Colin P. D. **A New Generalized Logistic Sigmoid Growth Equation Compared with the Richards Growth Equation.** Annals of Botany, v. 83, p. 713 - 723, 1999.
- [10] BORGES, A. I. C. **Interface "Comparação de Curvas de Crescimento": Aplicação Informática para o auxílio na comparação de Curvas de Crescimento de populações de peixes.** Dissertação - Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto, 2008.
- [11] BORGES, L. S. **Métodos para problemas mal-postos discretos de grande porte.** Tese - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. Campinas, SP, 2013.
- [12] BOWERING, W.R. **Age and growth of Greenland Habbtut, *Reinhardtius hipoglossoides* (Walbaum),** ICNAF Subareas 2-4. ICNAF Res. Bull., v. 13, p. 5-10, 1978.
- [13] BRACCINI NETO, J. **Estudo genético de curvas de crescimento de aves de postura.** 1993. 102f. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Curso de Pós-graduação em Zootecnia, Universidade Federal de Pelotas, RS.
- [14] BRUTON, M.N.; ALLANSON, B.R. **The growth of *Tilapia mossambica* Peters (Pisces, Cichlidae) in lake Sibaya, South Africa.** J. Fish Biol.,v. 6, p. 701-715, 1974.
- [15] CAMPANA, S. E. **Accuracy, precision, and quality control in age determi-**

- nation, including a review of the use and abuse of age validation methods. *Journal of Fish Biology*, v. 59, p. 197-242, 2001.
- [16] CAMPOS, C. E. C. e OLIVEIRA, J. E. L. **CARACTERIZAÇÃO BIOMÉTRICA E MERÍSTICA DO SARAMUNETE, *Pseudupeneus maculatus* (OSTEICHTHYES: MULLIDAE), EM PONTA DE PEDRAS, PERNAMBUCO.** *Boletim do Instituto de Pesca, São Paulo*, v. 27, n. 2, p. 185 - 189, 2001.
- [17] CARASSO, A. S. **Determining surface temperatures from interior observations**, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, v. 42, n. 3, p. 558-574, 1982.
- [18] CARIA, E. C. S. **Análise de Processamento de Imagens Radiográficas por Métodos Baseados no Background Subtraction Method e no Emprego da Transformada Wavelet.** Dissertação - Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2009.
- [19] CARVALHO-FILHO, A. **Peixes da costa brasileira.** São Paulo: Marca d'Água. 1994.
- [20] CASSELMAN, J.M. **Age and growth assessment of fish from their calcified structures - techniques and tools.** In: Prince, E.D.; Pulos, L.M. (eds.). *Proceedings of the International Workshop on Age Determination of Oceanic Pelagic Fishes: Tunas, Billfishes, and Sharks.* NOAA Technical Report NMFS, v. 8, p. 1-17, 1983.
- [21] CERVIGÓN, F. **Los peces marinos de Venezuela.** Caracas, Fundación Científica Los Roques. 2a ed, 1993.
- [22] CERVIGÓN, F.; CAPRIANI, F.; FISCHER, W.; GARIBALDI, L.; HENDRICKX, M.; LEMUS, A. J.; MÁRQUEZ, R.; POUTIERS, J. M.; ROBAINA, G.; RODRIGUEZ, B. **FAO species identification sheets for fishery purposes. Field guide to the commercial marine and brackishwater resources of the northern coast of South America,** FAO, Rome, 1993.

- [23] CHENG, J.; LIU, J. J. e NAKAMURA, G. **The numerical realization of the probe method for the inverse scattering problems from the near field data**, Inverse Problems, v. 21, n. 3, p. 839-855, 2005.
- [24] CHENG, J.; YAMAMOTO, M. **One new strategy for a priori choice of regularizing parameters in tikhonov's regularization**. Inverse Problems, IOP Publishing, v. 16, n. 4, p. 31-38, 2000.
- [25] CHOW, S.; OKAMOTO, H.; MIYABE, N.; HIRAMATSU, K. e BARUT, N. **Genetic divergence between Atlantic and Indo-Pacific stocks of bigeye tuna (*Thunnus obesus*) and admixture around South Africa**. Molecular Ecology, n. 9, p. 221-227, 2000.
- [26] COLLETTE, B. B. e NAUEN, C. E. **FAO Species Catalogue. Vol. 2. Scombrids of the World. Na annotated and illustrated catalogue of tunas, mackerels, bonitos and related species known to date**. FAO Fisheries Synopsis, Rome, (125) Vol. 2, 1983.
- [27] Collette, B., A. Acero, A. F. Amorim, A. Boustany, C. Canales Ramirez, G. Cardenas, K. E. Carpenter, S. -KChang, W. Chiang, N. de Oliveira Leite Jr., A. Di Natale, D. Die, W. Fox, F.L. Fredou, J. Graves, F. H. Viera Hazin, M. Hinton, M. Juan Jorda, C. Minte Vera, N. Miyabe, R. Montano Cruz, R. Nelson, H. Oxenford, V. Restrepo, K. Schaefer, J. Schratwieser, R. Serra, C. Sun, L. P. T. Lessa, P. E. Pires Ferreira Travassos, Y. Uozumi, Y. E. Yanez. 2011. ***Thunnus obesus***. In: **IUCN 2011. IUCN Red List of Threatened Species**. Version 2011.2. [www.iucnredlist.org](http://www.iucnredlist.org). Downloaded on 18 November 2011.
- [28] COSSEAU, M. B. COTRINA, C. P. **Observaciones sobre la epoca de marcación del anillo de los otolitos de la merluza (MERLUCCIIDAE, *Merluccius merluccius hubbsi*)** Physis, Buenos Aires, v. 34, n. 89, p. 327-334, 1975.

- [29] CRAIG, I. J. D. e BROWN, J. C., **Inverse problems in astronomy**, Adam Hilger, Bristol, UK, 1986.
- [30] CRAVEN, P. e WAHBA, G. **Smoothing Noisy data with Spline Functions: Estimating the Correct Degree of Smoothing by the Method of Generalized Cross-Validation**. *Numerische Mathematik*, v.31, p. 377 - 403, 1979.
- [31] CUPPEN, J. J. M. **A numerical solution of the inverse problem of electrocardiography**. Thesis, Dept. of Mathematics, University of Amsterdam, 1983.
- [32] CUTRIM, L.; BATISTA, V. da S. **Determinação de idade e crescimento do mapará (*Hypophthalmus marginatus*) na Amazônia Central**. *ACTA Amazônica*, v. 35, n.1, p. 85 ? 92, 2005.
- [33] DEANS, S. R. **Radon Transform and its Applications**, Interscience, New York, 1983.
- [34] DOMINGUES, W. M. e HAYASHI, C. **ESTUDO EXPERIMENTAL SOBRE ANÉIS DIÁRIOS EM ESCAMAS NAS FASES INICIAIS DO DESENVOLVIMENTO DO CURIMBA, *Prochilodus lineatus* (VALENCIENNES, 1836) (Characiformes, Prochilodontidae)**, *Rev. Brasil. Biol.*, v. 58, n. 4, p. 609-617, 1998.
- [35] DUARTE-NETO, P.; HIGA, F. M. e LESSA, R. P. **Age and growth estimation of bigeye tuna, *Thunnus obesus* (Teleostei: Scombridae) in the southwestern Atlantic**. *Neotropical Ichthyology*, v. 10, p. 149 - 158, 2012.
- [36] DURAND, J. D.; COLLET, A.; CHOW, S.; GUINAND, B. e BORSA, P. **Nuclear and mitochondrial DNA markers indicate unidirectional gene flow of Indo-Pacific to Atlantic bigeye tuna (*Thunnus obesus*) populations, and their admixture off southern Africa**. *Marine Biology*, n. 147, p. 313-322, 2005.

- [37] ENGL, H. W.; HANKE, M. e NEUBAUER. A. **Regularization of Inverse Problems**, Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [38] FAGADE, S. O. **Age determination in *Tilapia melanotheron* (Rupell) in the Lagos Lagoon, Lagos, Nigeria**. In: Bagenal, T.B. (ed.) Ageing of fish: proceedings of a International Symposium. London: Unwin. p. 71-77, 1974.
- [39] FAGUNDES, L.; ARFELLI, C. A.; AMORIM, A. F. de. **PARÂMETROS DE CRESCIMENTO E DE MORTALIDADE DA ALBACORA-BANDOLIM, *Thunnus obesus*, CAPTURADA NO LITORAL SUDESTE-SUL DO BRASIL (1977-95)\***. Boletim do Instituto de Pesca, São Paulo, v. 27, n. 2, p. 175 - 184, 2001.
- [40] FREITAS A.R. **Curvas de crescimento na produção animal**. Revista Brasileira de Zootecnia, v.34, n.3, p.786 - 795, 2005.
- [41] GILAT, A. e SUBRAMANIAM, V. **Métodos Numéricos para Engenheiros e Cientistas: Uma Introdução com Aplicações usando MATLAB**. São Paulo: Bookman, 2008.
- [42] GOLAY, Savitzky A, MJE. **Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures**. Anal Chem, v.36, p. 1627-1639, 1964.
- [43] GOLUB, H. G.; HANSEN, P.C. e O'LEARY, D.P. **Tikhonov Regularization and Total Least Squares**. Siam J. Matrix Anal. APPL., v. 21, n. 1, p. 185 - 194, 1999.
- [44] GOLUB, H. G.; WAHBA, G. e HEATH, M. **Generalized Cross-Validation as a Method for Choosing a Good Ridge Parameter**. Technometrics, v. 21, n. 2, p. 215 - 223, 1979.
- [45] GOMIERO, L. M. **Crescimento e mortalidade de *Brycon opalinus* (Characiformes, Characidae) no Parque Estadual da Serra do Mar, Mata Atlântica, Estado de São Paulo**. Biota Neotropica, v. 7, n. 1, p. 21 ? 26, 2007.

- [46] GONZALEZ, E. G.; BEERLI, P. e ZARDOYA1, R. **Genetic structuring and migration patterns of Atlantic bigeye tuna, *Thunnus obesus* (Lowe, 1839).** BMC Evolutionary Biology, n. 8, v. 252, 2008.
- [47] GORRY, Peter A. **General least-Squares Smoothing and differentiation by the Convolution (Savitzky-Golay) Method.** Analytical Chemistry, v. 62, n. 6, p. 570 - 573, 1990.
- [48] GRIMES, C.B. **Growth and length-weight relationship of vermilion snapper, *Rhomboplites aurorubens*, from North Carolina and South Carolina waters.** Trans. Am. Fish. Soc., v. 107, n. 454-456, 1978.
- [49] GUEDES, M. H. P. et al. **Estudo das curvas de crescimento de cordeiros das raças Santa Inês e Bergamácia considerando heterogeneidade de variâncias.** Ciência e Agrotecnologia, Lavras, v.28, n.2, p.381-388, 2004.
- [50] HADARNARD, J. **Lectures on the Cauchy Problem in Linear Partial Differential Equations.** Yale Univ. Press, New Haven, CT, 1923.
- [51] HADARNARD, J. **Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique.** Bull. Princeton Univ., v. 13, p. 49-52, 1902.
- [52] HÄMARIK, U. e RAUS, T. **On the a posteriori parameter choice in regularization methods,** Proceedings of the Estonian Academy of Sciences Physics Mathematics, v. 48, n. 2, p. 133-145, 1999.
- [53] HANKE, M. e SCHERZER, O. **Inverse Problems Light: Numerical Differentiation,** Am. Math. Mon, v. 108, p. 512-521, 2001.
- [54] HANSEN, P. C. **Deconvolution and regularization with Toeplitz matrices,** Numerical Algorithms, v. 29, n. 4, p. 323-378, 2002.

- [55] HANSEN, P. C. e O'LEARY, D. P. **The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems.** SIAM Journal on Scientific Computing, v. 14, n. 6, p. 1487-1503, 1993.
- [56] HANSEN, P. C.; NAGY, J. G. e O'LEARY, D. P. **Deblurring images: matrices, spectra, and filtering,** SIAM, Philadelphia, 2006.
- [57] HUMANN, P. **Reef Fish Identification - Florida, Caribbean, Bahamas.** New World Publications, Inc. 2a ed. 1994.
- [58] IBAMA (Instituto Brasileiro de Meio Ambiente e dos Recursos Naturais Renováveis) (2006) **Monitoramento da atividade pesqueira no litoral do Brasil.** [www.icmbio.gov.br/cepene/index.php?menu=61](http://www.icmbio.gov.br/cepene/index.php?menu=61).
- [59] ICCAT. **Report of the 2010 ICCAT bigeye tuna stock assessment session.** ICCAT, Pasaia, Gipuzkoa, Spain, July 5 to 9, 133p. 2010.
- [60] NASCIMENTO, K. P. do, Sociodinâmica: uma abordagem por simulações computacionais. Tese - Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife, 2014.
- [61] LAIRD, A. K. **Dynamics of relative growth.** Growth, v. 29, n. 9, p. 249-263, 1965.
- [62] LEPSKIJ, O. **On a problem of adaptive estimation in Gaussian white noise,** Theory of Probability and Its Applications, v. 35, n. 3, pp.454-466, 1990.
- [63] LIN, Jianqiang. et al. **Modeling of Typical Microbial Cell Growth in Batch Culture.** Biotechnol. Bioprocess Eng. v. 5, p. 382 - 385, 2000.
- [64] LIZAMA, M. de los A. P. e TAKEMOTO, R. M. **Relação entre o padrão de crescimento em peixes e as diferentes categorias tróficas: uma hipótese a ser testada.** Acta Scientiarum. V. 22, n. 2, p. 455-463, 2000.
- [65] LOBO, R. N. B. et al. **Parâmetros genéticos de características estimadas da curva de crescimento de ovinos da raça Santa Inês.** Revista Brasileira de Zootecnia, v.35, n.3, p.1012-1019, 2006.

- [66] LOBO, R. N. B. **Metodologias aplicadas na estimativa de parâmetros genéticos e avaliações genéticas de caprinos e ovinos.** In: IN: Semana da caprinocultura e ovinocultura brasileiras, 4., 2004, sobral. a pesquisa e os avanços tecnológicos contribuindo para o futuro da caprinoovinocultura brasileira: [anais]. sobral: embrapa caprinos, 2004. 13 F. 1 CD-ROM. Embrapa Caprinos e Ovinos-Artigo em anais de congresso (ALICE). [S.l.], 2008.
- [67] LOWE-McCONNELL, R.H. **Estudos ecológicos de comunidades de peixes tropicais.** Ed. da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.
- [68] LUBANSKY, A. S. et al. **A General Method of Computing the Derivative of Experimental Data.** AIChE Journal, v. 52, n. 1, p. 323 - 332, 2006.
- [69] MAITLAND, P.S. e CAMPBELL, R.N. **Freshwater fishes of the British Isles.** HarperCollins Publishers, London, 1992.
- [70] MALHADO, C. H. M. et al. **Curva de crescimento em ovinos mestiços Santa Inês x Texel criados no Sudoeste do Estado da Bahia.** Rev. Bras. Saúde Prod. An., v.9, n.2, p. 210-218, 2008.
- [71] MENEZES N. A. **Guia prático para conhecimento e identificação das tainhas e paratis (Pisces, Mugilidae) do litoral brasileiro.** Rev Bras Zool v. 2, p. 1?12, 1983.
- [72] MILNE, W. E. **Numerical Solution of Differential Equations.** Universit Michigan, 1953.
- [73] MIYAKE, M. **Field Manual for statistics and sampling Atlantic tunas and tuna-like fishes.** 3.ed. Madrid: International Commission for the Conservation of Atlantic Tunas, 1990.
- [74] MOROZOV, V. A. **On the solution of functional equations by the method of regularization.** Soviet Mathematics Doklady v. 7, p. 414-417, 1966.

- [75] MUNIZ, W. B. **Um Problema Inverso em Condução do Calor utilizando Métodos de Regularização**. Dissertação -Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 1999.
- [76] NATTERER, F. **The mathematics of computerized tomography**, Wiley, New York, 1986.
- [77] NELDER, J. A. **The fitting of a generation of the logistic curve**. Biometrics, Washington, v. 17, p. 89-110, 1961.
- [78] NELSON, J. S. **Fishes of the world**. 3 ed. John Wiley Sons, Inc., 1994.
- [79] OLMSTED, L.L.; KILAMBI, R.V. **Age and growth of spotted bass (*Micropterus punctulatus*) in Lake Fort Smith**, Arkansas. Trans. Am. Fish Soc., v. 107, n. 1, p. 21-25, 1978.
- [80] PEREIRA, C. S. **Comparação de modelos não-lineares para descrever o crescimento de fêmeas da raça Guzerá**. Pesquisa Agropecuária Brasileira, Brasília, v. 35, n. 9, p. 1843-1851, 2000.
- [81] QUEIROZ, P. T. S. A. de. **Modelos matemáticos utilizados para descrever curvas de crescimento em aves aplicados ao melhoramento genético animal**. Ciência Rural, SciELO Brasil, v. 39, n. 7, p. 2261-2269, 2009.
- [82] RADTKE, R. L. HOURIGAN, T. F. **Age and growth of the Antarctic fish *Nototheniops nudifrons***. Fish Bull., Dublin, v. 88, p. 557-571, 1990.
- [83] RAMIREZ, Z. R. S. **Filogeografia das espécies de tainha, *Mugil liza* e *M. platanus* (Teleostei: Mugiliformes)**. Dissertação - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências de Botucatu, 2011.
- [84] RICHARDS, J. F. **A flexible growth function for empirical use**. Journal of Experimental Botany, Oxford, v. 10, p. 290, 1959.

- [85] RONDON, E.O.O. et al. **Modelagem computacional para produção e pesquisa em avicultura**. Revista Brasileira de Ciência Avícola, v.4, n.1, p.199 - 207, 2002.
- [86] ROSS, J.L.; HUNSTMAN, G.R. **Age, growth and mortality of blueline tilefish from North Carolina and South Carolina**. Trans. Am. Fish. Soc., v. 111, p. 201-221, 1982.
- [87] SANTANA, F. M. et al. **Otolith micro- and macrostructure analysis to improve accuracy of growth parameter estimation for white mullet *Mugil curema***. Aquatic Biology, v. 7, p. 199 - 206, 2009.
- [88] SANTANA, F. M.; MORIZE, E. e LESSA, R. **Age and growth of the spotted goatfish, *Pseudupeneus maculatus* (Bloch, 1793) in Brazil, validated through marginal increment and oxytetracycline dyes in the sagittae**. J. Appl. Ichthyol, v. 22, p. 132 - 137, 2006.
- [89] SANTANA, T. J. S. **Novos Modelos de Curvas de Crescimento para Bovinos de Corte**. Tese - Universidade Federal de Lavras. Lavras, 2013.
- [90] SANTOSA, F.; PAO, Y.H.; SYMES, W. W. e HOLLAND, C., **Inverse problems of acoustic and elastic waves**, SIAM, Philadelphia, 1984.
- [91] SCAPIM, Juliana. **Modelo de von Bertalanffy generalizado aplicado a curvas de crescimento animal**. Dissertação - Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2008.
- [92] SCHOLKOPF, B. e SMOLA, A. J. **Learning with Kernels: Support Vector Machines, Regularization, Optimization, and Beyond**. MIT Press, Cambridge, MA, USA, 2001.
- [93] SILVA, N. A. M. da. **Seleção de Modelos de Regressão não Lineares e Aplicação do Algoritmo Saem na Avaliação Genética do Crescimento de Bovinos Nelore**. Tese - Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2010.

- [94] THOLON, P. e QUEIROZ, S. A. de. **Modelos matemáticos utilizados para descrever curvas de crescimento em aves aplicados ao melhoramento genético animal.** Ciência Rural, Santa Maria, v.39, n.7, p.2261-2269, 2009.
- [95] THORPE, A. J. e SCHARF, L. L. **Data adaptive rank-shaping methods for solving least squares problems**, IEEE Transactions on Signal Processing, v. 43, n. 7, p. 1591-1601, 1995.
- [96] TIKHONOV, A. N. **On solving incorrectly posed problems and method of regularization.** Dokl. Acad. Nauk USSR. v. 151, n. 3, p. 501- 504. 1963.
- [97] TIKHONOV, A. N. **On stability of inverse problems.** Dokl. Acad. Nauk USSR, v. 39, n. 5, p. 195-198, 1943.
- [98] TITTERINGTON, D. M. **Common structure of smoothing techniques in statistics**, International Statistical Review, v. 53, n. 2, p. 141-170, 1985.
- [99] WANG, Y. B.; JIA, X. Z. e CHENG, J. **A numerical differentiation method and its application to reconstruction of discontinuity**, Inverse Problems, v. 18, p. 1461-1476, 2002
- [100] WEATHERLEY, A. H.; GILL, H. S. **The biology of fish growth.** London: Academic Press, p. 443, 1987.
- [101] ZWEIETERING, M.H. et al. **Modeling of the Bacterial Growth Curve.** Applied and Environmental Microbiology, v. 56, n. 6, p. 1875 - 1881, 1990.