

**André Luiz Pinto dos Santos**

**Métodos geradores de modelos de crescimento e  
decrecimento aplicados às ciências agrárias**

**Recife**

**26 de junho de 2019**





**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO**  
**PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA**

**Métodos geradores de modelos de crescimento e decrescimento aplicados às  
ciências agrárias**

Tese julgada adequada para obtenção do título de Doutor em Biometria e Estatística Aplicada, defendida e aprovada por unanimidade em 25/06/2019 pela comissão examinadora

**Área de concentração: Biometria e Estatística Aplicada**

**Orientador: Prof. Dr. Guilherme Rocha Moreira**

**Coorientadores: Prof. Dr. Cícero Carlos Ramos de Brito e Prof. Dr. Frank Sinatra Gomes da Silva**

**Recife**

**26 de junho de 2019**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE  
Biblioteca Central, Recife-PE, Brasil

S237m Santos, André Luiz Pinto dos  
Métodos geradores de modelos de crescimento e  
decrecimento aplicados às ciências agrárias / André Luiz Pinto  
dos Santos. – 2019.  
70 f.: il.

Orientador: Guilherme Rocha Moreira.

Coorientador: Cícero Carlos Ramos de Brito, Frank Sinatra  
Gomes da Silva.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal Rural de  
Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Biometria e  
Estatística Aplicada, Recife, BR-PE, 2019.

Inclui referências.

1. Modelos bicompartimentais 2. Regressão não linear  
3. Combinações de modelos I. Moreira, Guilherme Rocha, orient.  
II. Brito, Cícero Carlos Ramos de, coorient. III. Silva, Frank  
Sinatra Gomes da, coorient. IV. Título

CDD 519.5

**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO**  
**PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA**

**Métodos geradores de modelos de crescimento e decrescimento aplicados às ciências agrárias**

André Luiz Pinto dos Santos

Tese julgada adequada para obtenção do título de Doutor em Biometria e Estatística Aplicada, defendida e aprovada por unanimidade em 25/06/2019 pela comissão examinadora

Orientador:

---

**Prof. Dr. Guilherme Rocha Moreira**  
Orientador

Banca examinadora:

---

**Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Larrisa Santana Barreto**  
**UFRPE-DEINFO**

---

**Prof. Dr. Cícero Carlos Ramos de Brito**  
**IFPE**

---

**Prof. Dr. Frank Sinatra Gomes da Silva**  
**UFRPE-DEINFO**

---

**Prof. Dr. Moacyr Cunha Filho**  
**UFRPE-DEINFO**



*Aos meus pais, Luiz Carlos e Ilma,  
dedico com muito amor e carinho.*



# Agradecimentos

À Deus, por sempre estar presente em cada momento de minha vida, pelas graças e bênçãos por eu ter conseguido concretizar mais uma etapa da minha vida profissional, me dando forças e me livrando das tribulações.

Aos meus pais, Luiz Carlos e Ilma, às minhas irmãs, Karla e Patrícia, aos meus sobrinhos, carinhosamente chamados de Honey e Klarinha, e meu cunhado Pedro que sempre estiveram ao meu lado, incentivando e dando apoio e força para seguir em frente. Tudo o que eu sou e tenho hoje é graças a vocês. AMO VOCÊS!

Ao orientador, professor Dr. Guilherme Rocha Moreira e aos co-orientadores professor Dr. Cícero Carlos Ramos de Brito e ao professor Dr. Frank Sinatra Gomes da Silva, pela orientação, apoio, discussões, confiança, amizade, paciência, ensinamentos e dedicação. A eles, a minha sincera e eterna gratidão.

Aos professores Aleixo, Borko Stošić, Moacyr Filho, Tatijana Stošić, da Universidade Federal Rural de Pernambuco, do Departamento de Biometria e Estatística Aplicada, pela convivência agradável e ao professor Antonio Samuel pela ajuda em momentos de dificuldade e, por vossa amizade.

Aos funcionários do DEINFO - UFRPE, Edvânia, Bela, Stefhany, as meninas: Fabi, Jú, Leny e Sol, por manter nosso ambiente deleitante e apropriado ao estudo, e em especial ao secretário Marco, do Programa de Biometria e Estatística Aplicada, pela atenção dispensada.

Aos amigos da pós-graduação que contribuíram de alguma forma para a conclusão deste Doutorado: Albaro Sanz, Carla Patrícia, Carlos Renato, Carlos Zarzar, Dennis (pimentinha), David Bernal, Diego Gomes, Edneide Ramalho, Edyniesky Miranda, Elaine Marques, Eucymara Santos, Eva Susana, Fábio Sandro, Fernando Henrique, Glauce Guerra, Hérica Silva, Izabelly Silva, José Edson, José Wesley, Juan Gamboa, Jucarlos Freitas, Kerolly Kedma, Lêda Santana, Patrícia Ximenes, Rodrigo Leon, Sara Daza.

Ao programa de Pós-graduação em Biometria e Estatística Aplicada (PPGBEA) da Universidade Federal Rural de Pernambuco.

Aos professores da banca examinadora pela disponibilidade e sugestões para melhora deste trabalho.

Ao suporte financeiro concedido pela CAPES (Comissão de Aperfeiçoamento de Pessoal do Nível Superior), para o aprimoramento de meus conhecimentos e obtenção do título de Doutor.

E a todos que de alguma maneira contribuíram, ou estiveram na torcida pela realização deste trabalho.

**Meus sinceros agradecimentos.**

*“Quando agente acha que tem todas as respostas,  
vem a vida e muda todas as perguntas. ”  
(Luis Fernando Verissimo.)*



# Resumo

Os objetivos deste trabalho foram: propor métodos geradores de modelos de crescimento e decrescimento aplicado nas ciências agrárias e propor modelos a partir destes métodos. A presente tese divide-se em cinco capítulos. O primeiro capítulo consiste numa revisão bibliográfica dos temas relacionados à curvas de crescimento e fazemos um apanhado dos modelos não-lineares mais utilizados. No segundo capítulo, apresenta-se o método gerador de modelos de crescimento e decrescimento e também foi realizado o desenvolvimento de um novo modelo não linear a partir do método apresentado para o primeiro artigo da tese. Além disto, propõe-se um novo modelo não linear para descrição de crescimento de caprinos e ovinos a partir do método. Para as aplicações do novo modelo proposto foi utilizado a base de dados de caprinos SRD apresentado no trabalho de [Cavalcante et al. \(2013\)](#) e dados de ovinos da raça Santa Inês oriundo do trabalho de [Sarmiento et al. \(2006a\)](#). O modelo proposto foi comparado, estatisticamente, com os modelos não lineares Logístico, Von Bertalanffy, Brody, Gompertz e Richards. A estimação dos parâmetros para os modelos foi feita pelos métodos de mínimos quadrados e pelo processo iterativo de Levenberg-Marquardt do programa IBM SPSS Statistics 1.0. Posteriormente, a seleção do melhor modelo, para descrever as curvas de crescimento, teve como base o quadrado médio do resíduo (QMR), critério de informação de Akaike (AIC), critério de informação Bayesiano (BIC), desvio médio absoluto (DMA) e coeficiente de determinação ajustado  $R_{aj}^2$ . Já para o terceiro capítulo trazemos um novo método gerador de modelos, obtidos a partir de combinações de modelos existentes, denominados de métodos construtores, além do mais, propomos um modelo para descrever a curva da cinética de produção de gases pela técnica *in vitro* semiautomática de diferentes acessos de dez genótipos de amendoim forrageiro. As leituras da produção de gases foram de dois, quatro, seis, oito, dez, 12, 14, 17, 20, 24, 28, 32, 48, 72, e 96 horas de incubação. O coeficiente de determinação ajustado ( $R_{aj}^2$ ), quadrado médio do resíduo (QMR), desvio médio absoluto (DMA), critério de informação de Akaike (AIC) e critério Bayesiano de Schwarz (BIC) foram utilizados para escolha do modelo de melhor ajuste das curvas. Entende-se que este capítulo é de fundamental importância para a sustentação do artigo apresentado no quarto capítulo desta tese. O capítulo quatro é constituído de uma proposta de novo modelo a partir da combinação dos modelos Logístico e Von Bertalanffy, a partir do método construtor (i) do capítulo três, afim de comparar e/ou identificar com o modelo logístico bicompartimental aquele que apresenta maior qualidade de ajuste à curva de cinética de produção cumulativa de gases (PCG) das silagens de girassol, de milho e de suas misturas. A estimação dos parâmetros foi feita pelo método dos mínimos quadrados utilizando o algoritmo de Gauss-Newton implementado na função nls do software R. A qualidade de ajuste dos modelos foi medida

pelo o coeficiente de determinação ajustado ( $R_{aj.}^2$ ), quadrado médio do resíduo (QMR), desvio médio absoluto (DMA), critério de informação de Akaike (AIC), critério Bayesiano de Schwarz (BIC) e a eficiência relativa (ER). No capítulo cinco são apresentadas as considerações finais sobre o trabalho. Os resultados mostram que os modelos propostos foram superiores aos outros modelos comumente utilizados para estudo das curvas de crescimento animal e/ou para descrever a cinética de produção de gases *in vitro*.

**Palavras-chave:** Modelos bicompartimentais, regressão não linear, combinações de modelos.

# Abstract

The objectives of this work were: to propose methods that generate models of growth and decrease applied in the agrarian sciences and to propose models from these methods. This thesis is divided into five chapters. The first chapter consists of a bibliographical review of the themes related to growth curves and a collection of the most used nonlinear models. In the second chapter, the method that generates growth and decay models is presented, and a new non linear model was developed from the method presented for the first article of the thesis. In addition, a new non-linear model is proposed for describing the growth of goats and sheep from the method. For the applications of the new proposed model, the SRD goat database presented in the work of Cavalcante et al. (2013) and data of Santa Inês sheep from the work of Sarmiento et al. (2006a). The proposed model was compared, statistically, with the nonlinear models Logistic, Von Bertalanffy, Brody, Gompertz and Richards. The parameter estimation for the models was done by least squares methods and the Levenberg-Marquardt iterative process of the IBM SPSS Statistics 1.0 program. Afterwards, the selection of the best model to describe the growth curves was based on the mean square of the residue (QMR), Akaike information criterion (AIC), Bayesian information criterion (BIC), absolute mean deviation (DMA) and adjusted determination coefficient  $R_{aj}^2$ . For the third chapter, we present a new model-generating method, obtained from combinations of existing models, called constructor methods. In addition, we propose a model to describe the kinetic curve of gas production by the technique *vitro* of different accessions of ten genotypes of forage peanuts. The gas production readings were two, four, six, eight, ten, 12, 14, 17, 20, 24, 28, 32, 48, 72, and 96 hours of incubation. The adjusted coefficient of determination ( $R_{aj}^2$ ), mean square of residue (QMR), mean absolute deviation (DMA), Akaike information criterion (AIC) and Bayesian Schwarz criterion (BIC) were used to select the best fit model of the curves. It is understood that this chapter is of fundamental importance for the support of the article presented in the fourth chapter of this thesis. Chapter four consists of a proposal for a new model based on the combination of the Logistic and Von Bertalanffy models, using the constructor method (VII) of chapter three, in order to compare and or identify with the bicompartamental logistic model the one with the highest quality of fit to the cumulative gas production (GWP) kinetics curve of sunflower, corn and mixtures of silages. The parameters were estimated using the least squares method using the Gauss-Newton algorithm implemented in the nls function of the R software. The fit quality of the models was measured by the adjusted coefficient of determination  $R_{aj}^2$ , mean square of the residue (QMR), absolute mean deviation (DMA), Akaike information criterion (AIC), Bayesian Schwarz criterion (BIC), and relative efficiency (ER). Chapter 5 presents the final considerations about

the work. The results show that the proposed models were superior to the other models commonly used to study animal growth curves and or to describe kinetics of in vitro gas production.

**Key-words:** Two-part models, nonlinear regression, model combinations.

# Lista de Figuras

Figura 1 – Dendrograma obtido pelo método de agrupamento, com base nos avaliadores de qualidade (QMR, AIC, BIC, DMA e $R_a^2$ .) para os modelos: Logístico, Von Bertalanffy, Brody, Gompertz, Richards e Proposto. . . . .	25
Figura 2 – Peso em função das idades de acordo com o modelo Proposto observado em caprinos SRD. . . . .	25
Figura 3 – TCA estimada pelo modelo Proposto. . . . .	26
Figura 4 – Dendrograma obtido pelo método de agrupamento, com base nas estatísticas QMR, AIC, BIC, DMA e $R_a^2$ . para os modelos Logístico, Von Bertalanffy, Brody, Gompertz, Richards e Proposto. . . . .	28
Figura 5 – Peso em função das idades de acordo com o modelo Proposto observado em ovinos da Raça Santa Inês. . . . .	29
Figura 6 – TCA estimada pelo modelo Proposto a partir de dados de ovinos. . . . .	29
Figura 7 – Curvas de produção cumulativa de gases dos dez genótipos, ao longo do tempo de incubação, a partir dos dados observados e ajustados pelos modelos VGB e LB . . . . .	40
Figura 8 – Diagrama de dispersão do modelo estatístico por meio dos resíduos para todos os genótipos . . . . .	41
Figura 9 – Gráficos de normalidade do modelo estatístico por meio dos resíduos para todos os genótipos . . . . .	41
Figura 10 – Análise de resíduos para o modelo LVB e LB para os materiais SM e 340SG . . . . .	55
Figura 11 – Análise de resíduos para o modelo LVB e LB para os materiais 660SG e SG . . . . .	55
Figura 12 – Curvas de produção cumulativa de gases para silagem de milho (SM), de girassol (SG) e associações (340SG e 660SG), ao longo do tempo de incubação, a partir dos dados observados e ajustados pelos modelos LVB e LB . . . . .	57



## Lista de tabelas

Tabela 1 – Modelos utilizados para ajuste das curvas de crescimento . . . . .	6
Tabela 2 – Modelos de crescimento/decrescimento gerados a parti da equação (2.3).	20
Tabela 3 – Valores estimados dos parâmetros $\alpha$ , $\beta$ , $k$ , $\gamma$ e $m$ juntamente com as estatísticas da qualidade de informação de ajuste: QMR, AIC, BIC, DMA e $R_a^2$ para o modelo Logístico, Von Bertalanffy, Brody, Gompertz, Richards e Proposto ajustados em dados de caprinos SRD. . . . .	24
Tabela 4 – Valores de estimativas $\hat{\alpha}$ , $\hat{\beta}$ , $\hat{k}$ , $\hat{\gamma}$ e $\hat{m}$ juntamente com estatísticas da qualidade de informação de ajuste: QMR, AIC, BIC, DMA e $R_a^2$ para os modelos Logístico, Von Bertalanffy, Brody, Gompertz, Richards e Proposto ajustados a dados de ovinos da Raça Santa Inês. . . . .	28
Tabela 5 – Modelos uni e bicompartimentais gerados a partir dos métodos. . . . .	38
Tabela 6 – Descrição matemática dos critérios de seleção. . . . .	39
Tabela 7 – Valores estimados dos parâmetros $\alpha_1$ , $\alpha_2$ , $k_1$ , $k_2$ e $\lambda$ para o modelo Logístico Bicompartimental (L.B.) e VGB ajustados em dados de genótipos de amendoim forrageiro. . . . .	43
Tabela 8 – Critérios utilizados na seleção do modelo não linear mais adequado. . . . .	44
Tabela 9 – Composição química e parâmetros da fermentação das silagens de milho e girassol . . . . .	50
Tabela 10 – Composição química das dietas experimentais com base na matéria seca	51
Tabela 11 – Descrição dos modelos bicompartimentais . . . . .	52
Tabela 12 – Valores das estatísticas dos testes de Shapiro-Wilk, Durbin-Watson e Breusch-Pagan, com os respectivos p-valor, aplicados aos resíduos dos modelos LVB e LB, ajustados ao PCG para SM, 340SG, 660Sg e SG . . . . .	56
Tabela 13 – Valores estimados e (desvio padrão) dos parâmetros $\alpha_1$ , $\alpha_2$ , $k_1$ , $k_2$ , $\beta$ e $\lambda$ para o modelo LVB e LB ajustados em dados de níveis (tratamentos)	59
Tabela 14 – Critérios utilizados na seleção do modelo não linear mais adequado . . . . .	60
Tabela 15 – Critérios utilizados na seleção do modelo não linear mais adequado . . . . .	60



# Sumário

Introdução geral . . . . .	1
<b>1 CAPÍTULO - Referencial teórico . . . . .</b>	<b>3</b>
2.1 Crescimento animal . . . . .	3
2.2 Fatores que afetam o crescimento . . . . .	4
2.3 Modelos de crescimento . . . . .	4
2.3.1 Modelo Richards . . . . .	5
2.3.2 Modelo Logístico . . . . .	6
2.3.3 Modelo Brody . . . . .	6
2.3.4 Modelo Gompertz . . . . .	7
2.3.5 Modelo Van Bertalanffy . . . . .	7
2.4 Estimação dos parâmetros dos modelos da curva de crescimento . . . . .	7
2.5 Valores iniciais . . . . .	8
2.6 Critérios de qualidade de ajuste . . . . .	9
2.7 Análise de agrupamentos . . . . .	9
2.7.1 Métodos não-hierárquicos e hierárquicos . . . . .	10
2.7.2 Determinação do número ótimo de grupos . . . . .	11
2.8 Taxa de crescimento absoluto . . . . .	11
<b>2 CAPÍTULO - Método gerador de modelos de crescimento e decrescimento obtidos a partir de equações diferenciais aplicado as ciências agrárias . . . . .</b>	<b>13</b>
2.1 Introdução . . . . .	17
2.2 Material e métodos . . . . .	18
2.2.1 Dados . . . . .	18
2.2.2 Métodos geradores de modelos de crescimento e decrescimento obtidos a partir de equações diferenciais . . . . .	18
2.2.3 Critério para seleção de modelo . . . . .	20
2.2.4 Análise de agrupamento e taxa de crescimento absoluto . . . . .	21
2.3 Resultados e discussão . . . . .	22
2.3.1 Dados de caprinos . . . . .	22
2.3.2 Dados de ovinos . . . . .	26
2.4 Conclusão . . . . .	29

<b>3</b>	<b>CAPÍTULO - Método gerador de modelos de crescimento e decrescimento obtidos a partir de combinações de modelos existentes aplicado às ciências agrárias</b>	<b>30</b>
3.1	Introdução	33
3.2	Material e métodos	34
3.2.1	Dados Utilizados	34
3.2.2	Método gerador de modelos de crescimento e decrescimento via combinações de modelos existentes	34
3.2.3	Modelo proposto e aplicação teórica	37
3.2.4	Estimação dos parâmetros dos modelos não lineares e avaliadores de qualidade de ajuste	38
3.3	Resultados e discussão	39
3.4	Conclusão	44
<b>4</b>	<b>CAPÍTULO - Novo modelo para avaliação das silagens de girassol e milho pela técnica "in vitro" de produção de gases</b>	<b>45</b>
4.1	Introdução	49
4.2	Material e métodos	49
4.2.1	Dados Utilizados	49
4.2.2	Modelo proposto	52
4.2.3	Critérios para seleção de modelos	53
4.2.4	Análise de resíduo	53
4.3	Resultados e discussão	54
4.4	Conclusão	60
<b>5</b>	<b>CAPÍTULO - Considerações finais</b>	<b>61</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>62</b>

# Introdução geral

Para compreensão de problemas reais o estudo e o desenvolvimento da área de modelagem de crescimento através de equações diferenciais tornou-se de suma importância, levando-se em consideração o uso dessas equações as quais foram estendidas, ainda, para diversas áreas da Ciência, permitindo sua aplicação nas mais diferenciadas áreas de conhecimento.

No processo de modelagem de um fenômeno, mesmo se admitindo que seja descrito, até parcialmente, e que seja aplicado determinado modelo matemático o ajuste de dados experimentais é a ferramenta imprescindível nesse processo.

Como ferramenta a modelagem se aplica para o uso do aperfeiçoamento, desempenho e compreensão da veracidade dos sistemas. Utilizando-se estes modelos como representações da realidade, constituindo-se no apoio em várias áreas do ensino, da pesquisa e da extensão, citada, também, como uma ferramenta de alta utilização e de grande desempenho, além de um baixo custo.

Segundo [Rondon, Murakami e Sakaguti \(2002\)](#), um “modelo” pode ser definido como descrição matemática por meio de equações, de fenômenos biológicos como: crescimento, digestão, absorção de nutrientes, entre outros. Assim, variáveis quantitativas são tomadas para representar os fatores que influenciam o fenômeno em estudo.

Utilizando-se das novas técnicas matemáticas sofisticadas avançadas, através dos procedimentos computacionais, para o desenvolvimento dos novos modelos aplicados em estudo de crescimento, gerando as hipóteses básicas para gerar modelos que alterem os valores de alguns coeficientes, de positivo para negativo, esta(s) equação(ões) resultante(s) poderá(ão) ser(em) utilizada(s) nos estudos de acréscimos ou decréscimos da produção, no crescimento e ou sobrevivência/mortalidade ([BRITO et al., 2007](#)).

O uso de modelos matemáticos para o estudo da curva de crescimento de caprinos e ovinos é uma prática que pode auxiliar na escolha do melhor método de exploração e, conseqüentemente, contribuir para aumentar o lucro do produtor.

Tendo em vista o que foi apresentado, objetivou-se apresentar um método gerador de modelos de crescimento e/ou decréscimo a partir de equações diferenciais, e um outro método de geração de modelos não lineares através de combinações de modelos existentes. Para demonstrar a potencialidade dos métodos geradores, vamos propor e ajustar três

modelos não lineares, através dos métodos, compará-los estatisticamente com os modelos comumente usados na literatura e identificar o melhor modelo entre os utilizados.

Assim sendo, o presente trabalho está organizado em cinco capítulos. O primeiro é dedicado ao referencial teórico; o segundo e o terceiro capítulo, são dedicados à apresentação formal dos métodos geradores de modelos de crescimento e/ou decrescimento. Além de descrevê-los matematicamente, os capítulos se encerram propondo o desenvolvimento de um modelo não linear. Entende-se que estes capítulos são de fundamental importância para a sustentação do artigo apresentado no quarto capítulo desta tese. E por fim o quinto capítulo com as considerações finais.

No primeiro artigo, método gerador de modelos de crescimento e decrescimento obtidos a partir de equações diferenciais aplicado as ciências agrárias, propõe-se um método gerador de modelos e um novo modelo não linear para descrever curvas de crescimento de caprinos e ovinos a partir do método proposto. Para o segundo artigo sobre o tema: Método gerador de modelos de crescimento e decrescimento obtidos a partir de combinações de modelos existentes aplicado às ciências agrárias, propõem-se também um novo método gerador de modelos não lineares a partir da combinação de modelos para descrever a curva de produção cumulativa de gases. Já no terceiro artigo intitulado: Novo modelo para avaliação das silagens de girassol e milho pela técnica "*in vitro*" de produção de gases, propomos um modelo bicompartimental.

Por fim, apresentamos as considerações finais a partir das análises e comparações dos resultados obtidos e direções a trabalhos futuros.

# 1 CAPÍTULO - Referencial teórico

## 2.1 Crescimento animal

O crescimento é um fenômeno biológico complexo, apesar de bastante estudado, ainda não está completamente elucidado. A ação dos hormônios e de fatores externos, principalmente a nutrição, permite que os indivíduos manifestem, em magnitude variável, a sua herança genética de crescimento (ALVES, 2003).

O crescimento é um processo fisiológico, o qual, começa na etapa pré-natal e termina quando o organismo atinge o peso adulto e a conformação característica da espécie. O nível de desenvolvimento das dimensões atingido é próprio de cada espécie/clone animal e, que depende tanto da espécie, como também da raça. Na pecuária, o termo de crescimento é utilizado constantemente como um período em que o animal aumenta de tamanho e ganha peso (FERNANDES et al., 2013).

Na fase pós-desmame a avaliação do ganho em peso auxilia no processo seletivo dos animais, o qual demonstra o potencial de velocidade de ganho em peso, e também proporciona a escolha de animais precoces (MARCONDES, 1999).

Apesar de serem intimamente ligados, os processos de desenvolvimento e crescimento, são diferenciados, não devendo ser confundidos e utilizados de forma equivocada. São analisados durante a fase de crescimento do animal dois fenômenos:

- i O aumento do próprio peso até chegar às dimensões da idade adulta, o que é chamado de crescimento;
- ii A modificação da própria conformação corpórea e as várias funções, o que indica o desenvolvimento (HAMMOND, 1955).

Biffani (1997), determinou quatro fases para a curva de crescimento: A fase progressiva: nessa fase a taxa de crescimento é muito elevada e positiva, chegando ao máximo no ponto de inflexão da curva, o qual corresponde à puberdade do animal; A fase regressiva: a partir do ponto de inflexão a taxa do crescimento começa a diminuir por causa de uma série de fatores que inibem progressivamente o crescimento, embora o animal não deixe de crescer. Graficamente o ponto de inflexão marca essa inversão na taxa do crescimento; A

fase estacionária: quando o animal deixa de crescer e o crescimento pode ser considerado apenas uma renovação dos tecidos; e morte: Os tecidos não são renovados e o animal morre.

## 2.2 Fatores que afetam o crescimento

Diversos são os fatores que influenciam as características relacionadas ao crescimento, como o peso ao nascer, sexo, sistema de criação, as condições climáticas, tipo de nascimento, época e ano de nascimento e idade da mãe ao parto (FIGUEIREDO FILHO et al., 2012; SARMENTO et al., 2006b).

Os diferentes fatores que influenciam o crescimento atuam com intensidade diferenciada ao longo da vida do animal. Assim, para melhor identificar os vários efeitos é imprescindível dividir o período do crescimento em duas fases: A fase que começa ao nascer e vai até ao desmame; e a fase que vai do desmame até a maturidade (BIFFANI, 1997).

## 2.3 Modelos de crescimento

Em geral os modelos de crescimento descrevem o comportamento de uma série de medidas de variáveis de interesse (comprimento, volume, peso, entre outras) ao longo do tempo (SANDLAND R.L.; MCGILCHRIST, 1979).

Os modelos de crescimento constituem uma das formas de se obter conhecimento sobre o crescimento das espécies. Os modelos mais utilizados para descrever crescimento animal são as funções de Richards, Logística, Brody, Gompertz e Von Bertalanffy (CHALH; GAZZAH, 2014).

Segundo Richards (1959), o estudo de curvas de crescimento surgiu com o modelo de Von Bertalanffy em experimentos metabólicos. Sendo representada pela equação:

$$W = [\eta / k - (\eta / k - W_0^{-m}) e^{-(1-m)kt}]^{1/1-m}, \quad (1.1)$$

em que  $W$  é o peso do animal,  $\eta$  e  $k$  são constantes de anabolismo e catabolismo, respectivamente;  $W_0$  é o valor de  $w$  quando o tempo  $t$  é igual a zero; quando  $t \rightarrow \infty$ , a curva do modelo converge assintoticamente para  $(\eta / k)^{1/1-m}$ , ocasionando em  $A$  (peso-limite do animal). Quando  $m = 1$ , o consumo de oxigênio é proporcional ao peso do animal e  $\partial W / \partial t = (\eta - k)W$ ; quando  $m = 2/3$ , o metabolismo do animal é proporcional à área da superfície corporal. A taxa de anabolismo é proporcional à  $m$ -ésima potência do peso e a taxa de catabolismo é proporcional ao peso, de modo que a taxa de crescimento do animal é dado por  $\eta W^m - kW$  (FREITAS, 2005).

Em razão do modelo (1.1) proporcionar resultados irreais de  $\eta$  e  $k$  em situações nas quais  $m > 1$ , ele foi reescrito com

$$W^{1-m} = A^{1-m} - \beta e^{-kt},$$

em que  $A^{1-m} = (\eta/k)$ ,  $\beta = \eta/k - W_0^{(1-m)} = A^{(1-m)} - W_0^{(1-m)}$ , e  $k = (1-m)k$ . Em seguida, foi reparametrizado para:

$$W^{1-m} = A^{1-m}(1 \pm \beta e^{-kt}), \quad (1.2)$$

em que  $b = \pm\beta A^{1-m}$ , o sinal é "-", quando  $m < 1$  e "+", quando  $m > 1$ .

### 2.3.1 Modelo Richards

O modelo de Richards foi originalmente criado para avaliar o estudo de crescimento de plantas (1959), o qual foi baseado no modelo desenvolvido por Von Bertalanffy (1957) para descrever o crescimento animal (ROCHA, 2013).

A função Richards é considerada por muitos pesquisadores como o modelo de crescimento mais completo, possui quatro parâmetros, entretanto, só apresenta três parâmetros interpretáveis biologicamente ( $\alpha$ ,  $k$  e  $m$ ) e o parâmetro  $\beta$  como uma constante de integração sem significado biológico, mas com ponto de inflexão variável. Brown, Fitzhugh e Cartwright (1976) e Sarmiento et al. (2006b), relatam dificuldades em se ajustar este modelo, devido a não convergência do processo iterativo, causado principalmente pela alta correlação negativa entre  $\beta$  e  $m$ .

A sua importância reside no ponto de inflexão, dependente do parâmetro  $m$ , que deve ser estimado para cada análise, para que se consiga uma melhor interpretação biológica. Assim, a partir da equação (1.2) e assumindo o ponto de inflexão (ângulo  $m$ ) do modelo de Richards igual a dois, obtém-se o modelo Logístico; igual a zero, o modelo de Brody; tendendo a um, o modelo de Gompertz; e quando igual a dois terços, o modelo Von Bertalanffy (Tabela 1) (Ó et al., 2012).

Tabela 1 – Modelos utilizados para ajuste das curvas de crescimento

Modelo	Equação
Richards (RICHARDS, 1959)	$W(t) = \alpha \left[ 1 - \beta e^{-kt} \right]^m + \varepsilon$ ( $m$ variável)
Logístico (NELDER, 1961)	$W(t) = \frac{\alpha}{1 + \beta e^{-kt}} + \varepsilon$ ( $m = 2$ )
Brody (BRODY, 1945)	$W(t) = \alpha \left[ 1 - \beta e^{-kt} \right] + \varepsilon$ ( $m = 0$ )
Gompertz (LAIRD, 1965)	$W(t) = \alpha e^{-\beta e^{-kt}} + \varepsilon$ ( $m \rightarrow 1$ )
Von Bertalanffy (BERTALANFFY, 1957)	$W(t) = \alpha \left[ 1 - \beta e^{-kt} \right]^3 + \varepsilon$ ( $m = 2/3$ )

em que  $W(t)$  é o peso à idade  $t$ ;  $\alpha$  representa o peso adulto;  $k$  é o índice de maturidade ou velocidade de crescimento;  $\beta$  é a constante de integração;  $m$  é o parâmetro que dá forma à curva;  $e$  é a base do logaritmo natural;  $t$  é o tempo; e  $\varepsilon$  é o erro aleatório associado a cada pesagem.

### 2.3.2 Modelo Logístico

No modelo Logístico (NELDER, 1961), o parâmetro  $\beta$  é fixo e igual a um. Proposto pelo matemático P.F. Verhulst em 1838 para expressar a lei do crescimento de populações humanas (LAIRD, 1966), no ponto de inflexão apresenta uma curva simétrica, podendo alcançar 50% do valor assintótico. Em seu primeiro trecho se aproxima a uma função exponencial de taxa relativa de crescimento constante e em seu segundo trecho a função de Brody (FERNANDES et al., 2013).

### 2.3.3 Modelo Brody

No modelo de Brody o parâmetro  $m$  assume o valor um. Este modelo considera a velocidade do crescimento proporcional ao crescimento que fica por realizar, assim as taxas de crescimento diminuem à medida que aumenta o peso e idade. Este modelo foi proposto para descrever o crescimento após o ponto de inflexão ou de auto inibição do crescimento. A maioria dos trabalhos que utilizam este modelo, consideram o nascimento como o ponto de inflexão, logo pode ser utilizado para descrever o crescimento pós-natal, (FERNANDES et al., 2013). Assim, o perfil de crescimento modelado por esta função não atribui forma sigmoide à curva (OLIVEIRA, 1995).

France, Dijkstra e Dhanoa (1996) atribuíram que o modelo de Brody pressupõe que o mecanismo quantitativo de crescimento é constante e independe do peso ( $W$ ) do organismo. Os autores ressaltaram ainda, que este mecanismo atua a uma taxa proporcional ao nível do substrato ( $S$ ), e o crescimento é irreversível.

### 2.3.4 Modelo Gompertz

O modelo Gompertz, foi publicado em 1825 por Benjamin Gompertz para estudar as leis de mortalidade e natalidade humanas (LAIRD, 1966). Winsor em 1932 foi um dos primeiros a propor o uso do modelo Gompertz para descrever o crescimento animal (FRANCE; DIJKSTRA; DHANOA, 1996). Conforme Savageau (1980), tornou-se um dos modelos mais utilizados para descrever o crescimento de animais, plantas, tumores, e em estudos de envelhecimento e mortalidade. A função de Gompertz (LAIRD, 1965) foi proposta sob a suposição de que a taxa de crescimento específico cai exponencialmente com o tempo. O ponto de inflexão neste modelo é fixo em 0,37 do valor de  $\alpha$  (DUARTE, 1975).

O crescimento é proporcional ao peso do organismo ( $W$ ), em que a eficácia do mecanismo de crescimento declina com o tempo. O substrato não é limitante e o crescimento é irreversível France, Dijkstra e Dhanoa (1996). Esses autores reportam que o modelo Gompertz apresenta um rápido crescimento inicial no primeiro trecho da curva e na segunda fase do crescimento, uma abordagem mais lenta para atingir a assíntota, quando comparado ao modelo Logístico.

### 2.3.5 Modelo Von Bertalanffy

O modelo de Von Bertalanffy (1957), baseia-se na suposição de que o crescimento é a diferença entre as de taxas de anabolismo e catabolismo do animal. Assim, Von Bertalanffy propôs que a taxa de anabolismo é proporcional à área de superfície corporal, enquanto que o catabolismo é proporcional ao peso corporal. Neste modelo o ponto de inflexão  $m$  é fixo em aproximadamente 0,30 do valor de  $\alpha$ .

## 2.4 Estimação dos parâmetros dos modelos da curva de crescimento

Na literatura vários métodos iterativos são propostos para obtenção das estimativas de mínimos quadrados dos parâmetros de um modelo de regressão não-linear. Em princípio, tais métodos podem ser utilizados quando o método de Gauss-Newton apresentar problemas com relação à convergência (BATES; WATTS, 1988).

Os mais utilizados são o método de Gauss-Newton ou método da linearização, método de Marquardt, o método de Newton e o método Steepest-Descent ou método do gradiente (Bates e Watts, 1988), o qual diferem na forma  $\theta - \theta^0$ . Em geral, os critérios básicos são:

$$\text{Gauss-Newton: } \theta - \theta^0 = (X' X)^{-1} X' \varepsilon$$

$$\text{Marquardt: } \theta - \theta^0 = [X' X + \delta \text{diag}(X' X)]^{-1} X' \varepsilon$$

$$\text{Newton: } \theta - \theta^0 = G^{-1} X' \varepsilon$$

$$\text{Gradiente: } \theta - \theta^0 = X' \varepsilon$$

em que  $(X' X)^{-}$  é uma inversa generalizada.

Os métodos Gauss-Newton e Marquardt realizam a regressão dos resíduos em relação as primeiras derivadas do modelo não-linear em relação aos parâmetros, até acontecer a convergência. Já o método de Newton faz a regressão desses resíduos em relação a uma função das segundas derivadas do modelo não-linear com relação aos parâmetros. O método Gradiente é baseado no gradiente ou grau de variação dos resíduos  $\varepsilon'$   $\varepsilon$ .

A maioria dos softwares estatísticos possuem rotinas com a implementação desses métodos, sendo que os dois mais utilizados são os de Gauss Newton e Marquardt. É incontestável que a rapidez na convergência depende da complexidade do modelo em estudo e principalmente da qualidade dos valores iniciais, imprescindível em qualquer método iterativo.

## 2.5 Valores iniciais

Para que todos os métodos iterativos alcancem a convergência, é fundamental determinar valores iniciais para os parâmetros o mais preciso possível, ou seja, quanto melhor os valores forem, menor será o número de interações necessárias para se encontrar a convergência, porque uma má escolha pode resultar em convergência lenta, a convergência para um mínimo local, ou mesmo, não convergir.

Conforme [Draper e Smith \(1998\)](#), baseadas em qualquer informação disponível, os valores iniciais podem ser aproximações preliminares, por exemplo, sugeridas por experiências anteriores. Para [Bates e Watts \(1988\)](#) e [Draper e Smith \(1998\)](#), alguns outros princípios para determinar valores iniciais podem ser usados:

- (i) interpretar o comportamento da função esperança e das derivadas da função esperança, em termos de parâmetros analiticamente ou graficamente;
- (ii) usar linearidade condicional se possível;
- (iii) reduzir dimensões substituindo-se valores para alguns parâmetros;

- (iv) transformar a função esperança geometricamente ou analiticamente para alcançar comportamento mais simples, perfeitamente linear. Pode-se desconsiderar o mesmo apenas para a obtenção das estimativas iniciais, no caso em que o erro é aditivo.

## 2.6 Critérios de qualidade de ajuste

Ao selecionarmos modelos é preciso ter em mente que não existem modelos verdadeiros, existem, apenas modelos aproximados da realidade que, causam perda de informações. Deste modo, é necessário fazer a seleção do “melhor” modelo, dentre aqueles que foram ajustados, para explicar o fenômeno sob estudo (EMILIANO et al., 2010).

Na literatura existem critérios que fornecem estatísticas que tratam da comparação de modelos não-lineares que auxiliam na avaliação da qualidade do ajuste das curvas de crescimento. Segundo Silveira et al. (2011b), diversos avaliadores podem ser utilizados para avaliar a qualidade de ajuste. Dentre os métodos existentes na literatura encontram-se o quadrado médio do resíduo - QMR, o desvio médio absoluto - DMA, o critério de informação de Akaike - AIC, proposto por Akaike (1974), o critério de informação bayesiano - BIC, proposto por Schwarz et al. (1978), e o coeficiente de determinação ajustado ( $R^2$ ).

Porém, quando se considera um grande número de critérios de ajuste a definição do melhor modelo pode se tornar um processo complicado, porque pode acontecer de um mesmo modelo apresentar um alto desempenho para um critério de ajuste, enquanto para outro poderá ser baixo. Uma saída para este tipo de problema seria a aplicação de métodos multivariados, por exemplo, análise de agrupamento, com o objetivo de agrupar modelos semelhantes de maneira simultânea em relação a todos os critérios estudados (SILVEIRA et al., 2009).

## 2.7 Análise de agrupamento

A análise de agrupamento também conhecida como conglomerados ou cluster, constitui uma metodologia numérica multivariada. Tem como objetivo dividir os elementos da amostra, ou população, em grupos de tal forma que exista homogeneidade dentro do grupo e heterogeneidade entre grupos (JOHNSON; WICHERN, 1992). Isto quer dizer que os elementos de um determinado conjunto devem ser mutuamente similares com relação às variáveis estudadas e os elementos de outros conjuntos sejam diferentes em relação a estas mesmas variáveis.

Segundo Manly (1994), uma análise de agrupamento pode ser realizada tanto para

encontrar os verdadeiros grupos dos objetos quanto reduzir os dados. As variáveis são usualmente agrupadas com base nos coeficientes de correlação ou medidas de associação. Segundo Cruz, Regazzi e Carneiro (2004), existem dois tipos de medidas que podem ser consideradas como critérios para a caracterização da semelhança entre os elementos amostrais que são as medidas de similaridade e dissimilaridade.

Segundo Silveira et al. (2010), estas medidas constituem a base desta metodologia, visto que a análise de agrupamento se inicia com a obtenção de uma matriz  $n \times n$  de medidas de similaridade ou dissimilaridade obtidas da matriz  $n \times p$  de dados. Em que  $n$  é o número unidades amostrais, medidas de acordo com  $p$  variáveis. Quanto maior o valor observado nas medidas de similaridade, mais parecidos são os objetos, enquanto que para as mediadas de dissimilaridade, quanto maior o valor observado, menos semelhantes, ou mais divergentes, serão os objetos (JOHNSON; WICHERN, 1998).

Nas medidas de similaridade, a mais utilizada é o coeficiente de correlação de Pearson. Quando se tratam de medidas de dissimilaridade, ou medidas de distâncias, as principais são a distância Euclidiana, distância Euclidiana média e distância de Mahalanobis, métricas de Minkowski e de Canberra e o coeficiente de Czekanowski (CRUZ; REGAZZI; CARNEIRO, 2004; FERREIRA, 2011; JOHNSON; WICHERN, 1998).

Definido a medida de distância, passa-se então a escolher um método de agrupamento. Os métodos de grupamento mais utilizados são os não-hierárquicos e os hierárquicos.

### 2.7.1 Métodos não-hierárquicos e hierárquicos

Os métodos não-hierárquicos, foram desenvolvidos para agrupar elementos em  $k$  grupos, em que  $k$  é a quantidade de grupos definida previamente. Nem todos valores de  $k$  apresentam grupos satisfatórios, assim sendo, aplica-se o método várias vezes para diferentes valores de  $k$ , escolhendo os resultados que apresentem melhor interpretação dos grupos ou uma melhor representação gráfica (BUSSAB; MIAZAKI; ANDRADE, 1990).

Na maioria dos métodos não-hierárquicos, a ideia central é escolher uma partição inicial dos elementos e, em seguida, alterar os membros dos grupos para obter-se a melhor partição (ANDERBERG, 1973). Os métodos das  $k$ -médias e o  $k$ -medóides são exemplos de alguns métodos não hierárquicos mais utilizados. Quando comparado com o método hierárquico, o método não-hierárquico é mais rápido porque não é necessário calcular e armazenar, durante o processamento, a matriz de similaridade.

Os objetos nos métodos hierárquicos são classificados em grupos em diferentes passos, de forma hierárquica, até produzir uma árvore de classificação, os dendrogramas (BUSSAB; MIAZAKI; ANDRADE, 1990). Os métodos hierárquicos são os mais utilizados

e se dividem em aglomerativos e divisivos. Nos aglomerativos, no início cada objeto é considerado um grupo, desta forma, tem-se  $n$  grupos e, em cada procedimento os dois grupos de menor distância são aglomerados e o processo é repetido até reunir todos os  $n$  objetos em um só grupo.

Ainda em relação aos métodos aglomerativos, os mais conhecidos são: método do vizinho mais próximo, método do vizinho mais distante, método da ligação média, método do centróide e o método de Ward. Nos métodos divisivos, a ideia é partir de um único grupo de elementos, e por meio de divisões sucessivas, obter vários outros sub-grupos dissimilares. O método hierárquico divisivo mais conhecido é o proposto por [Sforza e Edwards \(1964\)](#).

## 2.7.2 Determinação do número ótimo de grupos

A análise de agrupamento é uma das mais importantes técnicas de classificação multivariada. No entanto, a determinação do número ótimo de grupos na etapa final dos estudos, quando se utiliza os métodos hierárquicos é uma das tarefas mais difíceis para o pesquisador no processamento de agrupamento. Para facilitar essa decisão, vários autores ([CALIŃSKI; HARABASZ, 1974](#); [DUDA; HART, 1973](#); [HUBERT; LEVIN, 1976](#); [MOJENA, 1977](#)) têm sugerido diversos índices.

[Albuquerque \(2013\)](#) apresenta alguns índices que podem ser utilizados para facilitar o trabalho do pesquisador quanto ao número de grupos e validação dos mesmos, a saber: Critérios de formação de grupos, minimização do traço de  $W$ , minimização do determinante de  $W$ , maximização do traço de  $BW-1$ , índice Friedman e Rubin, Coeficiente de  $R$ , Estatística Pseudo  $F$ , Lambda de Wilks, índice de Rand, índice de Rand Ajustado, Estatística Silhouette de Kaufman & Rousseeuw, Gráfico da Silhueta, índice Kappa de Cohen, índice de Jaccard, índice Dunn, índice de Validação SD, índice de Beale e índice de Fowlkes e Mallows.

## 2.8 Taxa de crescimento absoluto

A taxa de crescimento absoluto – TCA é obtida a partir da primeira derivada do modelo ajustado, em relação ao tempo ( $\partial W/\partial t$ ). A TCA estima o ganho de peso em cada unidade de tempo  $t$  e, como o tempo está registrado em dias, representa o ganho de peso médio diário, estimado ao longo da trajetória de crescimento dos animais dentro da população ([SARMENTO et al., 2006b](#)).

O ponto de inflexão é o ponto em que a TCA muda de crescente para decrescente,

ou seja, é o momento em que a curva muda de direção. O ponto de inflexão da curva, é importante para auxiliar os produtores na administração de programas alimentares específicos e na definição da melhor idade ao abate. A partir do ponto de inflexão, a taxa de crescimento começa a diminuir em virtude de uma série de fatores que inibe progressivamente o crescimento, embora o animal não deixe de crescer (CRAPLET, 1966).

## 2 CAPÍTULO - Método gerador de modelos de crescimento e decrescimento obtidos a partir de equações diferenciais aplicado as ciências agrárias

### Resumo

O objetivo deste trabalho é propor um método gerador de modelos de crescimento e decrescimento por meio de equações diferenciais, bem como apresentar um modelo a partir do método proposto, compará-lo entre os modelos matemáticos não lineares clássicos seguintes, Logístico, Von Bertalanffy, Brody, Gompertz, e Richards e identificar aquele que representa melhor a curva média de crescimento. Para isso, foram utilizados dados de caprino (SRD - Sem Raça Definida) e de ovinos da raça Santa Inês oriundos, respectivamente, dos trabalhos de [Cavalcante et al. \(2013\)](#) e [Sarmiento et al. \(2006a\)](#). A qualidade de ajuste foi medida por meio do quadrado médio do resíduo (QMR), critério de informação de Akaike (AIC), critério de informação Bayesiano (BIC), desvio médio absoluto (DMA) e coeficiente de determinação ajustado  $R_{aj}^2$ . Os parâmetros dos modelos ( $\alpha$ , peso à idade adulta;  $\beta$ , uma constante de integração;  $\gamma$ , parâmetro de forma sem interpretação biológica;  $k$ , taxa de maturação; e  $m$ , ponto de inflexão) foram estimados pelo método de mínimos quadrados utilizando o algoritmo de Levenberg-Marquardt por meio do Software IBM SPSS Statistics 1.0. Observou-se que o modelo Proposto foi superior aos outros modelos para o estudo das curvas de crescimento de caprinos e ovinos de acordo com a metodologia e condições em que foi desenvolvido o presente estudo.

**Palavras-chave:** Curva de crescimento, modelo não linear, novo modelo, seleção de modelo.



# Abstract

This study aims to propose a method to generate growth and degrowth models using differential equations as well as to present a model based on the method proposed, compare it with the classic non linear mathematical models Logistic, Von Bertalanffy, Brody, Gompertz, and Richards, and identify the one that best represents the mean growth curve. To that end, data on Undefined Breed (UB) goats and Santa Inês sheep from the works of [Cavalcante et al. \(2013\)](#). (SRD - Sem Raça Definida) and [Sarmiento et al. \(2006a\)](#), respectively, were used. Goodness-of-fit was measured using residual mean squares (RMS), Akaike information criterion (AIC), Bayesian information criterion (BIC), mean absolute deviation (MAD), and adjusted coefficient of determination  $R_a^2$ . The models' parameters ( $\alpha$ , weight at adulthood;  $\beta$ , an integration constant;  $\gamma$ , shape parameter with no biological interpretation;  $k$ , maturation rate; and  $m$ , inflection point) were estimated by the least squares method using Levenberg-Marquardt iteration on the software IBM SPSS Statistics 1.0. It was observed that the proposed model was superior to the others to study the growth curves of goats and sheep according to the methodology and conditions under which the present study was carried out.

**Key-words:** Growth curve, non linear model, new model, model selection.



## 2.1 Introdução

O nordeste Brasileiro colabora muito para a criação de caprinos e ovinos, uma vez que mais da metade dos animais domésticos é encontrada nessa região (IBGE, 2012), tendo como fonte principal de alimento para produção animal as pastagens nativas (caatinga). Um dos objetivos mais importantes na criação de caprinos e ovinos é obter peso adequado em curto período de tempo.

Em um programa de melhoramento genético de caprinos ou ovinos o estudo da curva de crescimento pode ser utilizado para descrever o desenvolvimento do animal ao longo do tempo, auxiliando no estabelecimento de estratégias de programas alimentares e na descrição da idade ótima para abate (MALHADO et al., 2008a; CARNEIRO et al., 2007; SANTANA; COSTA; FONSECA, 2001).

Segundo Teixeira et al. (2012) as curvas de crescimento dos animais são estudadas por meio do ajuste de modelos não lineares, pois permite sintetizar informações precisas sobre ganho de peso dos animais e prognósticos futuros para animais do mesmo grupo racial sob a mesma situação ambiental.

Na literatura, são encontrados estudos comparando modelos não lineares para ajustes de curvas de crescimento de caprinos e ovinos. De acordo com Malhado et al. (2009) e Chalh e Gazzah (2014), entre estes modelos, tradicionalmente, para descrever o crescimento em animais, os cinco mais utilizados são, Logístico (NELDER, 1961), Von Bertalanffy (BERTALANFFY, 1957), Gompertz (LAIRD, 1965), Brody (BRODY, 1945) e Richards (RICHARDS, 1959). Assim, é possível considerar grande volume de informação em três ou quatro parâmetros que podem ser interpretados biologicamente, como peso assintótico e taxa de crescimento (MCMANUS; LOUVANDINI; CAMPOS, 2010).

Alguns autores têm estudado esses modelos, em caprinos (Ó et al., 2012; SOUSA et al., 2011) e em ovinos (SOUZA et al., 2011; NETO et al., 2016), sendo necessário, para diagnóstico alguns critérios para selecionar aqueles mais competitivos (SARMENTO et al., 2006b; GUEDES et al., 2005).

Dada à dinâmica com que os modelos matemáticos vêm sendo aplicados nas pesquisas biológicas, alguns autores como Santana et al. (2016), Filho et al. (2012) e Brito et al. (2007) entendem que ainda são necessários mais estudos sobre curvas de crescimento animal e que existe espaço para novos modelos que possam trazer resultados mais significativos e gerem estimativas mais precisas. Portanto, sempre existe a possibilidade de que um novo modelo possa apresentar um melhor desempenho em termos de interpretações biológicas e convergência dos parâmetros (SANTANA et al., 2016).

Assim, o objetivo deste trabalho é apresentar um método gerador de modelos de

crescimento e decrescimento por meio de equações diferenciais, bem como propor um modelo a partir deste, e compará-lo com os modelos matemáticos não-lineares comumente utilizados identificando aquele que indica melhor qualidade de ajuste às curvas de crescimento de dados de caprino (SRD - Sem Raça Definida) e de ovinos da raça Santa Inês.

## 2.2 Material e métodos

### 2.2.1 Dados

Neste trabalho utilizaremos duas bases de dados de crescimento de caprinos e ovinos, originalmente apresentados nos artigos de [Cavalcante et al. \(2013\)](#) e [Sarmiento et al. \(2006a\)](#), respectivamente.

[Cavalcante et al. \(2013\)](#) aplicaram os modelos não lineares Logístico e Von Bertalanffy a dados de peso de 23 caprinos SRD criados na comunidade Santiago, no município de Simplício Mendes (PI), do nascimento aos 185 dias de idade, obtidos no período de maio a novembro de 2009, totalizando 575 informações.

Já [Sarmiento et al. \(2006a\)](#) utilizaram registros de pesos do nascimento aos 196 dias de idade de 927 cordeiros da raça Santa Inês, controlados de 1983 a 2000, pertencentes à Empresa Estadual de Pesquisa Agropecuária da Paraíba (EMEPA-PB), localizada no município de Soledade-PB, semiárido paraibano.

### 2.2.2 Métodos geradores de modelos de crescimento e decrescimento obtidos a partir de equações diferenciais

Segundo [Bertalanffy \(1957\)](#), a variação do crescimento animal em função do tempo é proporcional a diferença entre a síntese (anabolismo) e degradação (catabolismo), do material de construção do corpo, que em termos matemáticos foi expresso por

$$\frac{dW(t)}{dt} = \eta W^m(t) - kW^n(t), \quad (2.1)$$

em que  $W(t)$  representa o peso corporal,  $t$  o tempo,  $m$  e  $n$  constantes,  $\eta$  e  $k$  representam as constante de anabolismo e catabolismo, respectivamente. A expressão (2.1) corresponde à lei da alometria, ou seja, que a taxa do processo sintético e degradativo em um corpo pode ser expressa como uma função potência.

Inspirado na hipótese biológica de [Bertalanffy \(1957\)](#), dada através de (2.1), propomos um método, de caráter, inicialmente bastante geral, a saber. O somatório das variações

dos crescimentos e/ou decrescimentos em relação às variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_k$  é proporcional ao anabolismo e o catabolismo, ou seja,

$$\begin{aligned} & \sum_{l_1=0, \dots, l_k=0}^{n_1, \dots, n_k} a_{l_1, \dots, l_k} f_{l_1, \dots, l_k}(x_1, \dots, x_k) \frac{\partial^{l_1 + \dots + l_k} W(x_1, \dots, x_k)}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_k^{l_k}} = \\ & = aW^\theta(x_1, \dots, x_k)f(x_1, \dots, x_k) - bW^\lambda(x_1, \dots, x_k)g(x_1, \dots, x_k), \end{aligned} \quad (2.2)$$

em que  $f(x_1, \dots, x_k) \geq 0$ ,  $g(x_1, \dots, x_k) \geq 0$ ,  $f_{l_1, \dots, l_k}(x_1, \dots, x_k) \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^k l_i \geq 1$ ,  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ ,  $a + b > 0$ ,  $\theta \in \mathfrak{R}$  e  $\lambda \in \mathfrak{R}$ . Como podemos notar, a Equação (2.2), pode contemplar não apenas a variável tempo, mais outras variáveis importantes à compreensão de um crescimento. Apesar dessa possibilidade, apresentamos a seguir um subcaso de (2.2), buscando generalizar, tanto quanto possível, a ideia contida em (2.1). De fato, sob as condições  $k = 1$ ,  $n_1 = 1$ ,  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$ ,  $f_0(x_1) = 0$ ,  $f_1(x_1) = 1$  e  $x_1 = t$ , podemos escrever a Equação (2.2) de uma maneira mais simplificada,

$$\frac{dW(t)}{dt} = aW^\theta(t)f(t) - bW^\lambda(t)g(t). \quad (2.3)$$

Apesar de (2.3), ser um caso particular da Equação (2.2), ela admite como subcasos todos os modelos não-lineares de crescimento (e decrescimento) bem estabelecidos na literatura, obtidos por meio de equações diferenciais, como pode ser visto na Tabela 1. Ao mesmo tempo que (2.3) generaliza modelos preexistentes, esta equação se mostra adequada para a geração de novas propostas de modelos. Considerando, em (2.3),  $\theta = 1$ ,  $\lambda = 0$ ,  $f(t) = e^{kt}$  e  $g(t) = a e^{kt}$ , temos a seguinte expressão

$$\frac{dW(t)}{dt} = aW(t)e^{kt} - abe^{kt}. \quad (2.4)$$

É importante notar que a Equação (2.4) pode ser reescrita como (uma vez que  $b$  é constante)

$$\frac{dW(t)}{dt} - \frac{db}{dt} = a e^{kt} (W(t) - b),$$

e depois de algum desenvolvimento algébrico chegamos a seguinte expressão

$$W(t) = b \left[ 1 + \frac{e^c}{b} e^{\frac{a}{k}(e^{kt})} \right] \quad (2.5)$$

A Equação (2.4) constitui nosso modelo proposto, cuja solução de maneira mais operacional, encontra-se na última linha da Tabela 1 ao fazer, na Equação (2.5),  $b = \alpha$ ,  $\frac{e^c}{b} = \beta$  e  $\frac{a}{k} = \gamma$ .

Sejam  $b = \alpha$ ,  $\frac{e^c}{b} = \beta$  e  $\frac{a}{k} = \gamma$ , logo temos  $W(t) = \alpha [1 + \beta e^{\gamma e^{kt}}] + \varepsilon$ .

Para testar e comparar os modelos, utilizamos o modelo Logístico, Von Bertalanffy, Brody, Gompertz, Richards e o Proposto (Tabela 1).

Tabela 2 – Modelos de crescimento/decrescimento gerados a parti da equação (2.3).

Modelos	$a$	$b$	$\theta$	$\lambda$	$f(t)$	$g(t)$	Modelo Gerado
Logístico (NELDER, 1961)	-	-	2	1	1	1	$W(t) = \frac{\alpha}{1 + \beta e^{-kt}} + \varepsilon$
Von Bertalanffy (BERTALANFFY, 1957)	-	-	$\frac{2}{3}$	1	1	1	$W(t) = \alpha [1 - \beta e^{-kt}]^3 + \varepsilon$
Brody (BRODY, 1945)	-	-	0	1	1	1	$W(t) = \alpha [1 - \beta e^{-kt}] + \varepsilon$
Gompertz (LAIRD, 1965)	-	-	1	1	1	1	$W(t) = \alpha e^{-\beta e^{-kt}} + \varepsilon$
Chapm-Richard (RICHARDS, 1959)	-	-	-	1	1	1	$W(t) = \alpha [1 - \beta e^{-kt}]^m + \varepsilon$
Mitscherlich (SILVA, 1986)	-	-	0	1	1	1	$W(t) = \alpha [1 - k^t] + \varepsilon$
Brito-Silva 2 (BRITO et al., 2007)	-	-	1	1	$e^{\eta t}$	$e^{\eta t}$	$W(t) = \alpha [e^{\beta e^{kt} + \gamma e^{\varphi t}}] + \varepsilon$
Silva-Bailey (SILVA, 1986)	-	0	1	-	$\eta^t$	-	$W(t) = \alpha e^{k\eta^t} + \varepsilon$
Decaimento Exponencial	0	-	-	1	-	$t$	$W(t) = \alpha e^{-kt} + \varepsilon$
Crescimento Exponencial	-	0	1	-	$t$	-	$W(t) = \alpha e^{kt} + \varepsilon$
Weibull	-	-	0	1	$t^\gamma$	$t^\gamma$	$W(t) = \alpha - \beta e^{kt^\gamma} + \varepsilon$
Proposto	-	-	1	0	$e^{kt}$	$ae^{kt}$	$W(t) = \alpha [1 + \beta e^{\gamma e^{kt}}] + \varepsilon$

Nestes modelos  $W(t)$  é o peso corporal ( $kg$ ) na idade  $t$ ;  $t$  é tempo; ( $k$ ) é taxa específica de maturação, que indica a velocidade com que o animal se aproxima do seu tamanho na fase adulta (SARMENTO et al., 2006b);  $\alpha$  é o peso assintótico quando  $t$  tende a infinito (este parâmetro é interpretado como peso à idade adulta);  $m$  é o parâmetro que dá forma à curva;  $\beta$ ,  $\varphi$  e  $\gamma$  são parâmetros de forma sem interpretação biológica;  $e$  é a exponencial; e  $\varepsilon$  é o erro aleatório associado a cada pesagem com distribuição normal, média zero e variância constante. As estimativas dos parâmetros dos modelos para os dados de caprinos e ovinos foram obtidas por meio do método de mínimos quadrados, usando o processo iterativo de Levenberg-Marquardt pelo Software IBM SPSS Statistics 1.0.

### 2.2.3 Critério para seleção de modelo

Os critérios utilizados para selecionar o modelo que melhor descreve a curva de crescimento foram:

**2.2.3.1.** Quadrado médio do resíduo (QMR) é calculado dividindo-se a soma de quadrados do resíduo pelos graus de liberdade do resíduo  $n - p$ , isto é,

$$QMR = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - p}, \quad (2.6)$$

**2.2.3.2.** Critério de informação de (AKAIKE, 1974) - AIC e o Critério de Informação Bayesiano - BIC (SCHWARZ et al., 1978), definidos por:

$$AIC = n + n \log(2\pi) + n \log\left(\frac{SQ_{res}}{n}\right) + 2(p + 1), e \quad (2.7)$$

$$BIC = n + n \log(2\pi) + n \log\left(\frac{SQ_{res}}{n}\right) + (\log n)(p + 1). \quad (2.8)$$

Segundo Albuquerque (2003), os critérios de AIC e BIC impõem penalidade de acordo com o número de parâmetros a serem estimados.

**2.2.3.3.** c. O desvio médio absoluto dos resíduos - (DMA), conforme sugerido por Sarmiento et al. (2006b) obtido pela seguinte fórmula:

$$DMA = \frac{\sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|}{n}. \quad (2.9)$$

**2.2.3.4.** O coeficiente de determinação ajustado: Uma vez que o coeficiente de determinação  $R^2$  aumenta à medida que se adiciona uma nova variável ao modelo matemático, uma alternativa para corrigir esse problema quando se compara funções com diferentes números de parâmetros é utilizar como critério o coeficiente de determinação ajustado calculado da seguinte forma:

$$R_{aj.}^2 = R^2 - \frac{p - 1}{n - p}(1 - R^2). \quad (2.10)$$

Para os itens anteriores:  $SQ_{res}$  é a soma de quadrados dos resíduos definida por  $SQ_{res} = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2$ ;  $y_i$  é o peso observado;  $\hat{y}_i$  o peso estimado (previsão) de  $y_i$ ;  $n$  o número de observações; e  $p$  o número de parâmetros livres do modelo. Assim, o melhor modelo ajustado é aquele que apresentar menores valores para QMR, AIC, BIC e DMA e maior valor para  $R_a^2$ .

## 2.2.4 Análise de agrupamento e taxa de crescimento absoluto

Em uma etapa seguinte esses dados foram submetidos à análise de agrupamento do software livre R versão 3.4.0. Para verificar o ajuste entre a matriz de dissimilaridade e os dendrogramas obtidos a partir de cada método de agrupamento, calculou-se o Coeficiente de Correlação Cofenético que indicou com mais consistência o Método de ligação Média,

com base na distância Euclidiana Média. Posteriormente utilizou-se o índice de Rand ajustado (HUBERT; ARABIE, 1985) para determinação do número de grupos, objetivando reunir os modelos de forma que exista heterogeneidade entre e homogeneidade dentro dos grupos de acordo com os valores dos avaliadores. Escolhido o melhor modelo, calculamos a taxa de crescimento absoluto (TCA), obtida a partir da primeira derivada do modelo ajustado, em relação ao tempo ( $\partial W(t) / \partial t$ ).

## 2.3 Resultados e discussão

### 2.3.1 Dados de caprinos

As estimativas dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $k$ ,  $\gamma$  e  $m$  e dos modelos ajustados e os valores de QMR, AIC, BIC, DMA e  $R_{aj}^2$ , utilizados para avaliar o modelo que melhor descreveu a curva média de crescimento de caprinos SRD, são apresentados na Tabela 2.

As estimativas  $\alpha$ , para os modelos em questão, se mostraram similares às análises de aspectos genéticos da curva de crescimento de caprinos Anglo-Nubiano, (SOUSA et al., 2011), contudo observamos valores menores para estas estimativas em outros trabalhos (CARNEIRO et al., 2009; MALHADO et al., 2008a). Uma exceção foi o modelo Brody que superestimou o peso ao nascer até a idade adulta (759,43 kg). Pires et al. (2017), estudando curva de crescimento de caprinos Repartida criados na caatinga relatam a superestimação deste parâmetro tanto para a função de Richards quanto para a função de Brody.

Uma justificativa para a estimativa do parâmetro  $\alpha$ , que indica o peso adulto pode ser devido aos dados utilizados de caprinos SRD cujas idades não ultrapassam os seis meses de vida (CAVALCANTE et al., 2013). Segundo (BROWN; FITZHUGH; CARTWRIGHT, 1976) esse não é o peso máximo que o animal atinge, e sim o peso médio à maturidade, livre de variações sazonais. Além disso, estudos afirmam que existem controvérsias de opiniões sobre o peso adulto ótimo de um animal, o qual depende da espécie, raça, seleção praticada de maneira prévia, sistema de manejo adotado e também das condições climáticas (CARNEIRO et al., 2009).

Para a análise do parâmetro  $k$ , importante indicador de precocidade, constatou-se que o modelo Gompertz, Proposto e o Logístico apresentaram os maiores valores (0.010; 0.012 e 0.020) e o modelo de Von Bertalanffy e Richards os menores valores (0,007; 0,009) com exceção da função Brody que subestimou esse parâmetro. Os modelos que se observaram mais precocidade  $k$ , indicaram os menores pesos adultos  $\alpha$ , ou seja, à medida que diminui a taxa de maturidade ocorre aumento do peso assintótico. Esse comportamento inverso tem sido relatado por outros autores (SARMENTO et al., 2006b; MALHADO et

al., 2009; PIMENTEL et al., 2003).

O parâmetro  $\beta$  está relacionado com o intercepto, isto é, uma constante de integração relacionada aos pesos iniciais do animal e sem interpretação biológica bem definida,  $m$  é o ponto de inflexão da curva e indica o momento em que o animal passa de uma fase de crescimento acelerada para uma fase de crescimento lento e, finalmente, o parâmetro  $\gamma$ , que aparece no modelo proposto, é utilizado para aumentar a flexibilidade do mesmo no ajuste dos dados.

Na literatura, poucos trabalhos foram encontrados com referências aos estudos da curva de crescimento de caprinos SRD (OLIVEIRA et al., 2009). Entretanto, observou-se grande variação na escolha dos modelos que melhor ajustaram a curva de crescimento em caprinos.

Para dados de caprinos das raças Mambрина e Anglo-Nubiana criados na caatinga, Sousa et al. (2011), Carneiro et al. (2009) e Malhado et al. (2008a) encontraram seus melhores ajustes por meio dos modelos Logístico, Bertalanffy e Brody, respectivamente. Segundo Sarmiento et al. (2006b) essa diferença quanto aos modelos ajustados é subjetivamente compreensível, pois irá depender do padrão de crescimento dos animais em estudo.

Porém, para o nosso estudo, foi observado o melhor ajuste para o modelo Proposto, que apresentou os menores valores para as estatísticas QMR, AIC, BIC e DMA, e o maior valor para  $R_a^2$ , seguido pelos modelos Logístico, Gompertz, Richards, Von Bertalanffy e Brody como pode ser visto por meio da Tabela 2.

Este resultado foi corroborado pela análise de agrupamento com base nos critérios utilizados, na qual se observou a formação de cinco grupos (Figura 1), sendo o primeiro formado pelo modelo Brody, o segundo pelos modelos de Von Bertalanffy e Richards, o terceiro pelo modelo de Gompertz, o quarto pelo modelo Logístico e o último formado pelo modelo Proposto. O gráfico com a curva de crescimento ajustada pelo modelo Proposto é apresentado na Figura 2. A partir de uma análise visual podemos observar que o modelo Proposto propiciou um bom ajuste.

As  $TCA_s$  obtidas pela primeira derivada do modelo Proposto em relação ao tempo, mostraram crescimento, até atingir o máximo, em torno de 0,100 kg/dia, e decréscimo com a idade. O ponto de inflexão da curva ocorreu aos 83 dias de idade, com peso de aproximadamente 6,72 kg (Figura 3).

Estudos anteriores com caprinos da raça Anglo-Nubiana mostraram ponto de inflexão de 71 dias e TCA de 0,130 kg/dia (MALHADO et al., 2008a); para machos e fêmeas, respectivamente, essas mesmas medidas foram 100 e 83 dias de idade e, 0,146 e

0,127 kg/dia, para caprinos da raça Mambrina da mesma região da Bahia (CARNEIRO et al., 2009).

Segundo Souza et al. (2013), o ponto de inflexão é importante para auxiliar os produtores em programas alimentares específicos e na definição da melhor idade ao abate, a melhor relação custo/benefício. De acordo com Neto et al. (2016), o ponto de inflexão e o TCA, podem ser influenciados por fatores ambientais e/ou genéticos.

A correlação estimada entre os parâmetros  $\alpha$  e  $k$  foi significativa e igual a -0,89 para o modelo Proposto e corroboram com estudos realizados com caprinos das raças Anglo-Nubiano Mambrina (CARNEIRO et al., 2009) e (MALHADO et al., 2008a). A relação biológica mais importante para uma curva está entre os parâmetros  $\alpha$  e  $k$  (PIMENTEL et al., 2003). A correlação negativa existente entre esses parâmetros indica que animais com menores taxas de crescimento atingem maiores pesos à maturidade.

Tabela 3 – Valores estimados dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $k$ ,  $\gamma$  e  $m$  juntamente com as estatísticas da qualidade de informação de ajuste: QMR, AIC, BIC, DMA e  $R_{aj}^2$  para o modelo Logístico, Von Bertalanffy, Brody, Gompertz, Richards e Proposto ajustados em dados de caprinos SRD.

Modelos	Parâmetros					Avaliadores				
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{k}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{m}$	QMR	AIC	BIC	DMA	$R_{aj}^2$
Logístico	19,84	6,35	0,020			0,09	16,62	21,49	0,25	0,996
V. Bertalanffy	30,44	0,58	0,007			0,11	20,59	25,47	0,49	0,995
Brody	759,43	0,99	0,000			0,14	27,31	32,20	7,17	0,994
Gompertz	25,21	2,35	0,010			0,10	18,35	23,23	0,25	0,995
Richards	25,69	0,10	0,009		23,20	0,11	20,59	26,69	0,44	0,995
Proposto	18,27	-1,17	0,012	-0,30		0,08	14,94	21,03	0,24	0,996

Figura 1 – Dendrograma obtido pelo método de agrupamento, com base nos avaliadores de qualidade (QMR, AIC, BIC, DMA e  $R_a^2$ .) para os modelos: Logístico, Von Bertalanffy, Brody, Gompertz, Richards e Proposto.

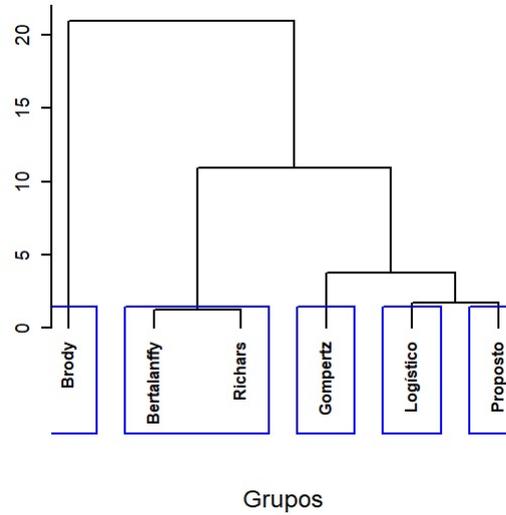


Figura 2 – Peso em função das idades de acordo com o modelo Proposto observado em caprinos SRD.

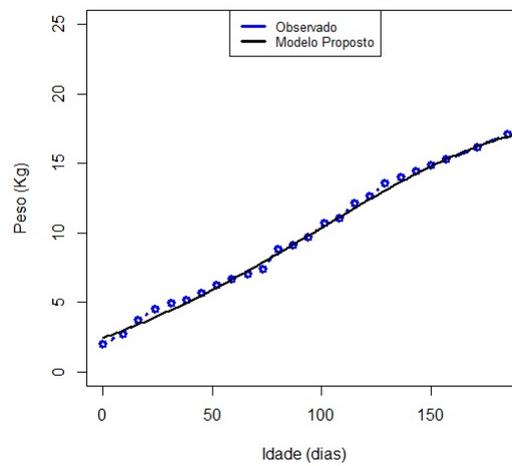
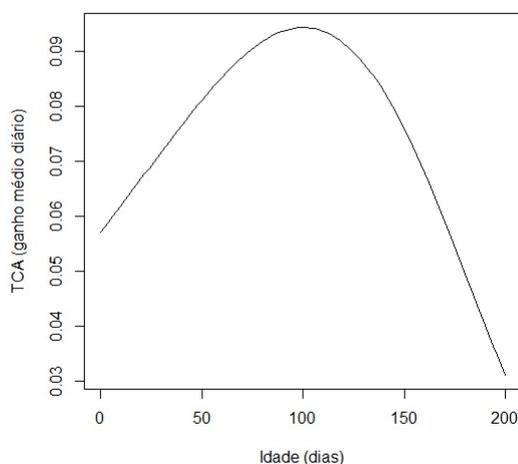


Figura 3 – TCA estimada pelo modelo Proposto.



### 2.3.2 Dados de ovinos

Na Tabela 3 são apresentadas as estimativas dos parâmetros para cada modelo, e os critérios utilizados para avaliar o modelo que melhor descreveu a curva média de crescimento de ovinos da raça Santa Inês.

A estimativa da taxa de crescimento  $\hat{k}$  apresentou grande variabilidade entre os modelos, com mínimo de 0,008 e máximo de 0,029. Considerando que a taxa de maturidade indica a velocidade de crescimento até atingir o peso assintótico, os valores de  $\hat{k}$  podem ser interpretados como indicadores de precocidade. Animais com valores altos de  $\hat{k}$  indicam maturidade precoce, quando comparado a animais de baixo  $\hat{k}$  e de peso inicial semelhante, (MALHADO et al., 2009).

O modelo de Gompertz se sobressaiu com respeito a seus competidores em estudo com ovinos da raça Santa Inês, do nascimento até os 196 dias de idade (SARMENTO et al., 2006b). No referido estudo as estimativas para os valores dos parâmetros são reproduzidos a seguir: Logística  $\hat{\alpha} = 23,17$ ;  $\hat{\beta} = 4,37$  e  $\hat{k} = 0,029$ ), Von Bertalanffy  $\hat{\alpha} = 24,81$ ;  $\hat{\beta} = 0,48$ ; e  $\hat{k} = 0,016$ ), Brody  $\hat{\alpha} = 27,41$ ;  $\hat{\beta} = 0,88$  e  $\hat{k} = 0,009$ ), Gompertz  $\hat{\alpha} = 24,17$ ;  $\hat{\beta} = 1,87$  e  $\hat{k} = 0,019$ ) e Richards  $\hat{\alpha} = 24,55$ ;  $\hat{\beta} = 0,34$ ;  $\hat{k} = 0,017$  e  $\hat{m} = 4,64$ ). Comparativamente, de acordo com a Tabela 3, vale salientar que estes resultados corroboram com os achados no presente estudo.

Em Neto et al. (2016), os valores 34,75 kg (Logístico), 39,68 kg (Von Bertalanffy), 48,89 kg (Brody) e 37,56 kg (Gompertz), encontrados para  $\hat{\alpha}$ , ao descrever o crescimento de ovinos Santa Inês criados em sistema semi-intensivo, se mostraram superiores para os respectivos modelos abordados neste estudo (vide Tabela 3).

É sabido que o pleno desenvolvimento de tecidos e órgãos é reflexo da maturidade fisiológica. Segundo [Amaral et al. \(2011\)](#) os machos da raça Santa Inês são considerados de grande porte podendo atingir de 120 a 150 kg à maturidade. Para [Toral \(2008\)](#) a estimativa do  $\hat{\alpha}$  pode estar sujeita a erros, pois em ocasiões, os dados ajustados por funções de crescimento, não englobam o crescimento do animal até a maturidade.

No entanto, a estimativa do peso assintótico para uma determinada raça pode diferir em função de outros fatores. Nesta situação, a diferença verificada entre os estudos pode ser pertinente ao manejo dos animais, visto que a estimativa do peso assintótico pode sofrer influência da raça e do sistema de criação ([MALHADO et al., 2008b](#)).

De acordo com os valores de  $R_a^2$ , os modelos avaliados foram praticamente semelhantes, com uma leve superioridade para o modelo Proposto. As estatísticas QMR, AIC, BIC e DMA, para o modelo Proposto foram as menores (0,03; -0,19; 0,21 e 0,09) e, portanto, podemos indicá-lo para ajustar curvas de crescimento de ovinos Santa Inês, logo foi o modelo que combinou peso a maturidade próxima ao observado com melhor ajuste aos pesos observados Figura 5.

Como anteriormente citado, esse fato foi corroborado pela análise de agrupamento, a qual indicou a formação de quatro grupos (Figura 4), um com o modelo Logístico e Brody, outro com os modelos Von Bertalanffy e Richards, um terceiro com o modelo Gompertz e o quarto com o modelo Proposto. Na Figura 5, podemos visualizar o padrão da curva de crescimento, ajustada pelo modelo Proposto, para os dados de ovinos da Raça Santa Inês.

A TCA foi crescente até atingir o máximo, cerca de 0,100 Kg por dia, e depois decresceu com a idade. O ponto de inflexão da curva foi atingido aos 125 dias de idade com peso de 8,6 kg (Figura 6). Resultados em estudos anteriores com ovinos da raça Santa Inês criados no Estado da Paraíba na EMEPA, encontraram uma TCA crescente até 0,170 kg por dia e ponto de inflexão atingido aos 52 dias de idade, com peso de 8,9 kg ([SARMENTO et al., 2006b](#)). Contudo, para estudos com ovinos da mesma raça, criados no Estado do Piauí, foram obtidas TCA de 0,28 kg por dia e ponto de inflexão de 28 dias de idade, com peso de 6,40 kg ([Ó et al., 2012](#)).

A taxa de crescimento começa a diminuir a partir do ponto de inflexão por diversos fatores que impedem gradativamente o crescimento, embora o animal não pare de crescer. [Sarmiento et al. \(2006b\)](#) frisaram que o decréscimo da TCA pode ser resultado de manejo inadequado para acompanhar a maior demanda de nutriente, à medida que o animal cresce.

A correlação estimada entre os parâmetros  $\alpha$  e  $k$  foi significativa e negativa (-0,79),

corroborando os achados de [Oliveira et al. \(2009\)](#) e [Sarmiento et al. \(2006b\)](#), indicando que os animais precoces possuem menor chance de atingir pesos elevados à maturidade. É necessário destacar que esta relação é biologicamente a mais importante.

Tabela 4 – Valores de estimativas  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{k}$ ,  $\hat{\gamma}$  e  $\hat{m}$  juntamente com estatísticas da qualidade de informação de ajuste: QMR, AIC, BIC, DMA e  $R_{aj}^2$  para os modelos Logístico, Von Bertalanffy, Brody, Gompertz, Richards e Proposto ajustados a dados de ovinos da Raça Santa Inês.

Modelos	Parâmetros					Avaliadores				
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{k}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{m}$	QMR	AIC	BIC	DMA	$R_{aj}^2$
Logístico	23,20	4,37	0,029			0,24	14,92	15,24	0,32	0,9973
V. Bertalanffy	24,88	0,48	0,016			0,07	3,10	3,39	0,16	0,9991
Brody	27,61	0,88	0,009			0,31	16,31	16,62	0,37	0,9965
Gompertz	24,22	1,87	0,019			0,04	1,27	1,60	0,15	0,9991
Richards	24,40	0,20	0,018		9,54	0,05	2,80	3,20	0,14	0,9991
Proposto	23,30	-2,33	0,008	-1,01		0,03	-0,19	0,21	0,09	1,0000

Figura 4 – Dendrograma obtido pelo método de agrupamento, com base nas estatísticas QMR, AIC, BIC, DMA e  $R_{aj}^2$  para os modelos Logístico, Von Bertalanffy, Brody, Gompertz, Richards e Proposto.

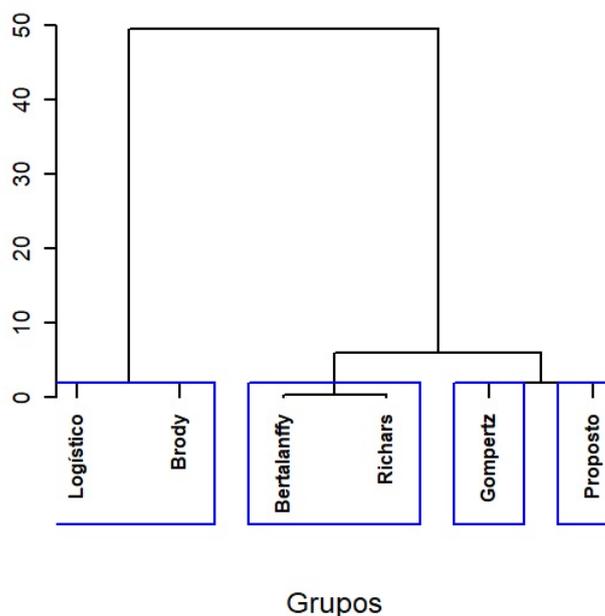


Figura 5 – Peso em função das idades de acordo com o modelo Proposto observado em ovinos da Raça Santa Inês.

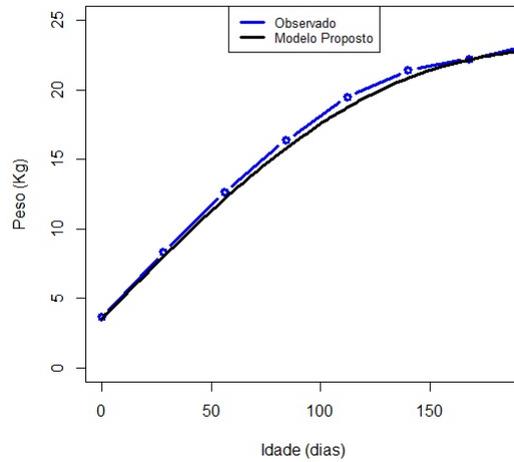
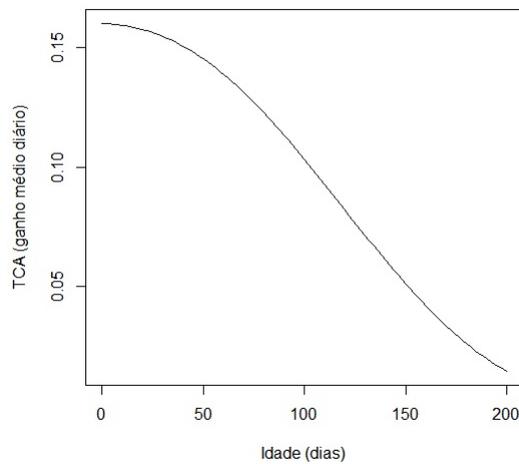


Figura 6 – TCA estimada pelo modelo Proposto a partir de dados de ovinos.



## 2.4 Conclusão

Tendo por base as interpretações biológicas dos parâmetros e as medidas de qualidade de ajuste, podemos concluir que o modelo Proposto, foi superior aos outros modelos. Portanto, o modelo não linear Proposto neste trabalho mostrou-se o mais adequado para descrever curvas de crescimento de caprinos SRD e de ovinos da Raça Santa Inês de acordo com a metodologia e condições em que foi desenvolvido o presente estudo.

# 3 CAPÍTULO - Método gerador de modelos de crescimento e decrescimento obtidos a partir de combinações de modelos existentes aplicado às ciências agrárias

## Resumo

Modelos matemáticos para descrever a produção de gases são largamente utilizados para estimar a digestibilidade e cinética da degradação ruminal. Assim, o presente estudo teve por objetivo apresentar um método gerador de modelos através da combinação de modelos existentes e propor um modelo denominado Von Bertalanffy-Gompertz bicompartimental a partir deste método. A seguir comparou-se o modelo proposto com o modelo logístico bicompartimental indicando aquele que melhor descreve a curva da cinética de produção de gases pela técnica *in vitro* semiautomática de diferentes acessos de amendoim forrageiro. Os dados utilizados são oriundos de um experimento cultivado e colhido na estação de Zootecnia do Extremo-Sul (Essul), em Itabela-BA, Brasil e os horários de leitura da produção de gases foram de 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 17, 20, 24, 28, 32, 48, 72, e 96 horas, após o início do processo de fermentação *in vitro*. Os parâmetros foram estimados pelo método de mínimos quadrados utilizando o processo iterativo de Gauss-Newton, a partir do programa R versão 3.4.1. A seleção do melhor modelo para descrever o acúmulo de gases teve como base o coeficiente de determinação ajustado ( $R_{aj}^2$ ), quadrado médio do resíduo (QMR), desvio médio absoluto (DMA), critério de informação de Akaike (AIC) e critério Bayesiano de Schwarz (BIC). Dentre os modelos ajustados, o modelo Von Bertalanffy-Gompertz bicompartimental apresentou melhor qualidade de ajuste para descrever a produção cumulativa de gases ao longo do tempo, de acordo com a metodologia e condições em que foi desenvolvido o presente estudo.

**Palavras-chave:** Curva de crescimento, parâmetros digestivos, produção de gases, seleção de modelo.

# Abstract

Mathematical models that describe gas production are widely used to estimate the rumen degradation digestibility and kinetics. The present study presents a method to generate models by combining existing models and to propose the von Bertalanffy-Gompertz two-compartment model based on this method. The proposed model was compared with the logistic two-compartment one to indicate which best describes the kinetic curve of gas production through the semi-automated *in vitro* technique from different pinto peanut cultivars. The data came from an experiment grown and harvested at the Far South Animal Sciences station (Essul) in Itabela, BA, Brazil and gas production was read at 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 17, 20, 24, 28, 32, 48, 72, and 96 h after the start of the *in vitro* fermentation process. The parameters were estimated by the least squares method using the iterative Gauss-Newton process in the software R version 3.4.1. The best model to describe gas accumulation was based on the adjusted coefficient of determination, residual mean squares, mean absolute deviation, Akaike information criterion, and Bayesian information criterion. The von Bertalanffy-Gompertz two-compartment model had the best fit to describe the cumulative gas production over time according to the methodology and conditions of the present study.

**Key-words:** Growth curve, digestive parameters, gas production, model selection.



### 3.1 Introdução

O Brasil apresenta capacidade e demanda na utilização das forrageiras como principal fonte de alimento na nutrição de animais. Porém, se faz necessário conhecer a capacidade produtiva, o valor nutricional e as características de degradação ruminal da forrageira, assegurando assim, maior decisão no atendimento das necessidades nutricionais dos ruminantes (JACOVETTI *et al.*, 2016). Os sistemas de formulação de dietas exigem o conhecimento do valor nutritivo dos alimentos, entre estes as plantas forrageiras constituem a fonte alimentar mais utilizada para compor a dieta de ruminantes. Os parâmetros cinéticos de degradação são importantes porque eles descrevem a digestão e caracterizam as propriedades intrínsecas dos alimentos que limitam a disponibilidade para os animais ruminantes (MERTENS, 1993).

Conforme reportado por Farias *et al.* (2011), vários são os modelos não lineares utilizados para estimar a cinética da fermentação ruminal dos alimentos. Uma grande vantagem desses modelos é a possibilidade de interpretação biológica dos parâmetros (SILVA *et al.*, 2010). No entanto, quando o crescimento apresenta um comportamento característico de forma a identificar etapas, as quais permitem dividir a curva em vários estágios, torna-se necessário adotar modelos de crescimento multicompartimentais, por considerarem parâmetros exclusivos para cada compartimento (KOOPS, 1986).

Um modelo logístico bicompartimental (LB) foi desenvolvido por Schofield, Pitt e Pell (1994) para estudos cinéticos de produção de gases *in vitro* com base no pressuposto de que a taxa de produção destes foi afetada pela massa microbiana e o nível do substrato. Vários pesquisadores têm utilizado o modelo LB, proposto por Schofield, Pitt e Pell (1994) no estudo da cinética de produção cumulativa de gases (FERRO *et al.*, 2017; PERETTI *et al.*, 2017). No entanto, o uso do modelo Logístico em alguns casos pode não ser adequado devido ao seu ponto fixo de inflexão na metade da produção cumulativa de gases (FRANCE *et al.*, 2000). Portanto, Wang, Tang e Tan (2011) e France *et al.* (2000) entenderam que ainda são necessários novos modelos que possam trazer resultados mais significativos biologicamente e que proporcionem ajustes matemáticos de amplas faixas de formas de curvas com pontos de inflexão variáveis. Além do mais, são altamente justificáveis, a criação de novos modelos para situações gerais e específicas, dada a dinâmica com que os modelos não lineares vêm sendo aplicados nas pesquisas biológicas (SANTOS *et al.*, 2018; SANTANA *et al.*, 2016; BRITO *et al.*, 2007).

Deste modo, objetivou-se apresentar um método gerador de modelos de crescimento e decrescimento via combinação de modelos existentes e especificamente, propor um novo modelo bicompartimental a partir da combinação dos modelos Von Bertalanffy e Gompertz. Os modelos logístico bicompartimental e o proposto foram comparados a fim de identificar

aquele que apresenta maior qualidade de ajuste às curvas de produção cumulativa de gases referente a dez genótipos de amendoim forrageiro (*Arachis Pintoi*) utilizados na alimentação de ruminantes.

## 3.2 Material e métodos

### 3.2.1 Dados Utilizados

Os genótipos foram cultivados e colhidos na estação de Zootecnia da CEPLAC, em Itabela-BA, Brasil, região com 100 m de altitude 16° 36' de latitude e a 39° 30' de longitude oeste, temperatura média anual de 23,3° C, 1350 mm de chuva e sem estação seca definida. Os genótipos foram colhidos no período chuvoso, com maior precipitação pluviométrica. O delineamento experimental utilizado foi o de blocos ao acaso, com dez genótipos de amendoim forrageiro e três repetições. Os tratamentos foram constituídos de dez acessos de *Arachis Pintoi* denominados pelos seguintes nomes ou códigos: 13251 (G1), 15121 (G2), 15598 (G3), 30333 (G4), 31135 (G5) e 31496 (G6) e 31534 (G7), 31828 (G8), cv. Itabela (G9) e cv. Rio (G10). Os genótipos foram plantados em canteiros com área total de 4 m<sup>2</sup> e área útil de 1 m<sup>2</sup>. Para a obtenção da produção de matéria seca (MS) e matéria verde (MV) por hectare, no período seco e chuvoso, os genótipos foram cortados a 5 cm do solo e após a pesagem da forragem verde colhida da área útil, esta foi levada ao laboratório de Nutrição Animal da Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC, onde foi seca em estufa com circulação de ar forçada a uma temperatura média de 55°C por 48 horas e posteriormente moída em moinho de facas tipo Willey equipado de peneira com crivos de 1mm. O teor de (MS) a 105° foi estabelecido pela secagem até o peso constante, os teores de proteína bruta (PB) e proteína insolúvel em detergente ácido (PIDA) foram definidos pelo método de Kjeldahl segundo (AOAC, 1990) e para o conteúdo da parede celular: fibra em detergente neutro (FDN) e fibra em detergente ácido (FDA) foram obtidos segundo Soest, Robertson e Lewis (1991) Van Soest et al. (1991). Os horários de leituras da produção de gases foram de 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 17, 20, 24, 28, 32, 48, 72, e 96 horas, após o início do processo de fermentação *in vitro* realizada na Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), conforme equação proposta por Maurício et al. (2001).

### 3.2.2 Método gerador de modelos de crescimento e decrescimento via combinações de modelos existentes

Esta Seção constitui um dos principais objetivos do nosso trabalho. Ela consiste na generalização de métodos de combinação aplicados às Ciências Agrárias. Estes métodos

foram disseminados ao longo de vários anos nesta mesma ciência e no presente trabalho, além de os reunir, prevemos outros possíveis métodos, que ainda não foram explorados.

Sejam, pois,  $W_1(t_1, \dots, t_k), \dots, W_n(t_1, \dots, t_k)$  modelos já existentes na literatura e considere  $f : \mathfrak{R}_+^n \rightarrow \mathfrak{R}$  uma função. Diz-se que

$$W(t_1, \dots, t_k) = f(W_1(t_1, \dots, t_k), \dots, W_n(t_1, \dots, t_k)) \quad (3.1)$$

é uma combinação de tais modelos via tal função. A depender de tal função, podemos obter vários métodos construtores de modelos, como os listados a seguir:

- (i) Método construtor de modelos de crescimento e decrescimento via combinações em soma ponderadas de potência de modelos ou combinações lineares de potência de modelos existentes

Sejam  $W_1(t_1, \dots, t_k), \dots, W_n(t_1, \dots, t_k)$  modelos existentes na literatura. Considere  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_j x_j^{\beta_j}$ ,  $x_1 = W_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_n = W_n(t_1, \dots, t_k)$ , logo temos que:

$$W(t_1, \dots, t_k) = f(W_1(t_1, \dots, t_k), \dots, W_n(t_1, \dots, t_k)) = \sum_{j=1}^n a_j W_j^{\beta_j}(t_1, \dots, t_k).$$

Portanto, para tal função  $f$ , o método construtor é dado por:

$$W(t_1, \dots, t_k) = \sum_{j=1}^n a_j W_j^{\beta_j}(t_1, \dots, t_k). \quad (3.2)$$

- (ii) Método construtor de modelos de crescimento e decrescimento via combinações em produto de potências de modelos existentes

Neste caso tome-se a função

$$f(x_1, \dots, x_n) = \alpha \prod_{j=1}^n x_j^{\beta_j},$$

para se obter como método construtor

$$W(t_1, \dots, t_k) = \alpha \prod_{j=1}^n W_j^{\beta_j}(t_1, \dots, t_k). \quad (3.3)$$

- (iii) Método construtor de modelos de crescimento e decrescimento via combinações em soma de produtos de modelos existentes

Neste outro caso basta tomar a função

$$f(x_1, \dots, x_{mn}) = \sum_{j=1}^n \left( a_j \prod_{i=1}^m x_{j_i}^{\beta_{j_i}} \right),$$

para se obter como método construtor

$$W(t_1, \dots, t_k) = \sum_{j=1}^n \left( a_j \prod_{i=1}^m W_{j_i}^{\beta_{j_i}}(t_1, \dots, t_k) \right). \quad (3.4)$$

- (iv) Método construtor de modelos de crescimento e decrescimento via combinações de produto de somas de modelos existentes

Neste item, devemos considerar a função

$$f(x_1, \dots, x_{mn}) = \prod_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m \alpha_{j_i} x_{j_i}^{\beta_{j_i}} \right)^{\lambda_j},$$

para se obter como método construtor

$$W(t_1, \dots, t_k) = \prod_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m \alpha_{j_i} W_{j_i}^{\beta_{j_i}}(t_1, \dots, t_k) \right)^{\lambda_j}. \quad (3.5)$$

- (v) Método construtor de modelos de crescimento e decrescimento via combinações em soma de potências somado ao produto de potências de modelos existentes

Neste outro caso basta tomar a função

$$f(x_1, \dots, x_{m+n}) = \sum_{j=1}^n \alpha_j x^{\beta_j} + \alpha_{n+1} \prod_{i=m+1}^{m+n} x_i^{\beta_i},$$

para se obter como método construtor

$$W(t_1, \dots, t_k) = \sum_{j=1}^n \alpha_j W^{\beta_j}(t_1, \dots, t_k) + \alpha_{n+1} \prod_{i=m+1}^{m+n} W_i^{\beta_i}(t_1, \dots, t_k). \quad (3.6)$$

- (vi) Método construtor de modelos de crescimento e decrescimento via combinações em soma de potências de somas de modelos existentes.

A função dada por

$$f(x_1, \dots, x_{mn}) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \left( \sum_{i=1}^m b_i x_{j_i}^{\beta_{j_i}} \right)^{\lambda_j},$$

deve ser considerada para se obter como método construtor

$$W(t_1, \dots, t_k) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \left( \sum_{i=1}^m b_i W_{j_i}^{\beta_{j_i}}(t_1, \dots, t_k) \right)^{\lambda_j}. \quad (3.7)$$

(vii) Método construtor de modelos de crescimento e decrescimento via combinações em acréscimos de parâmetros em modelos existentes

Um outro método construtor ocorre quando se faz acréscimo de parâmetros a um modelo existente. Se  $W_1 = W_1(t_1, \dots, t_k/\beta_1, \dots, \beta_m), \dots, W_n = W_n(t_1, \dots, t_k/\beta_1, \dots, \beta_m)$  são modelos existentes, então para cada função  $f$  e parâmetros extras  $(\beta_{m+1}, \dots, \beta_{m+r})$  podemos determinar o método construtor:

$$W(t_1, \dots, t_k/\beta_1, \dots, \beta_{m+r}) = f(W_1, \dots, W_n/\beta_{m+1}, \dots, \beta_{m+r}). \quad (3.8)$$

Como podemos notar nosso método tem caráter bastante geral pois, a Equação (3.1) pode contemplar não apenas a variável tempo, mais outras variáveis que podem ser importantes à compreensão da dinâmica de um crescimento. A seguir apresentamos um “subproduto” de nosso método e o ilustramos a partir de uma aplicação numérica.

### 3.2.3 Modelo proposto e aplicação teórica

Os modelos Von Bertalanffy e Gompertz são modelos básicos muito utilizados nos ajustes de curvas de crescimento. O modelo Gompertz foi desenvolvido para descrever o crescimento microbiano, e foi utilizado por Schofield, Pitt e Pell (1994) pela primeira vez para estudar a cinética de produção de gases *in vitro* (WANG; TANG; TAN, 2011). Esses modelos foram usados em estudos como os de Üçkardeş e Efe (2014) e Mello et al. (2008) para cinética de produção cumulativa de gases. Mais recentemente Santos et al. (2018) apresentaram os modelos Von Bertalanffy e Gompertz (dentre outros) (vide Tabela 1, p. 2664) como subcasos do que eles denominaram de método gerador de modelos de crescimento obtidos a partir de equações diferenciais. Assim, o desenvolvimento do modelo matemático proposto foi resultante da combinação dos modelos:

$$\text{Von Bertalanffy} : W_1(t) = \alpha_1 \left(1 - \beta_1 e^{-k_1 t}\right)^3 + \varepsilon \quad (3.9)$$

$$\text{Gompertz} : W_2(t) = \alpha_2 e^{-\beta_2 e^{-k_2 t}} + \varepsilon \quad (3.10)$$

De fato, seja  $W(t)$  uma estimativa do crescimento do volume acumulado de gases, logo pelo método construtor (i) dado a partir da Equação (3.2), podemos escrever

$$W(t) = W_1(t) + W_2(t) = \alpha_1 \left(1 - \beta_1 e^{-k_1 t}\right)^3 + \alpha_2 e^{-\beta_2 e^{-k_2 t}} + \varepsilon \quad (3.11)$$

Assim, a Equação (3.11) constitui nosso modelo proposto, chamado de modelo Von Bertalanffy-Gompertz Bicompartimental, denotado por “VGB”, por ser uma combinação das equações (3.9) e (3.10). De maneira análoga, observando os métodos construtores dados na Seção 3.2.2, podemos gerar modelos uni ou bicompartimentais encontrados na literatura alguns dos quais, ajustados a cinética de produção de gases *in vitro* e outros com potencial aplicação a esta área, conforme descrito na Tabela 5.

Tabela 5 – Modelos uni e bicompartimentais gerados a partir dos métodos.

Modelos Uni	Método Utilizado	Modelos Gerados
Brito-Silva	(II)	$W(t) = \alpha \left\{ (1 + \beta e^{-kt_f}) (1 + \beta e^{-kt_i})^{-1} e^{\lambda(\alpha^{t_f} - \alpha^{t_i})} \right\}^\theta + \varepsilon$
Exponencial	(VII)	$W(t) = \alpha_1 \left\{ 1 - e^{-k_1(t-\lambda)} \right\} + \varepsilon$
Gompertz	(VII)	$W(t) = \alpha e^{\left\{ -e^{[1-k(t-\lambda)]} \right\}} + \varepsilon$
Modelos Bicompartimentais	Método Utilizado	Modelos Gerados
Brody-Gompertz	(I)	$W(t) = \alpha_1 \left\{ 1 - e^{(-K_1 t)} \right\} + \alpha_2 e^{\left\{ -e^{[1+e^1 K_2(\lambda-t)]} \right\}} + \varepsilon$
Exponencial-Logística	(I)	$W(t) = \alpha_1 \left\{ 1 - e^{(-K_1 t)} \right\} + \alpha_2 e^{\left\{ -e^{[1+K_2 \log(\lambda-t)]} \right\}} + \varepsilon$
Gompertz Bicompartimental	(I)	$W(t) = \alpha_1 e^{\left\{ -\beta_1 e^{(-K_1 t)} \right\}} + \alpha_2 e^{\left\{ -\beta_2 e^{(-K_2 t)} \right\}} + \varepsilon$
Exponencial Bicompartimental	(I)	$W(t) = \alpha_1 \left\{ 1 - e^{[-K_1(t-\lambda)]} \right\} + \alpha_2 \left\{ 1 - e^{[-K_2(t-\lambda)]} \right\} + \varepsilon$
Logístico Bicompartimental	(I)	$W(t) = \alpha_1 \left\{ 1 + e^{[2-4K_1(t-\lambda)]} \right\}^{-1} + \alpha_2 \left\{ 1 + e^{[2-4K_2(t-\lambda)]} \right\}^{-1} + \varepsilon$
VGB	(I)	$W(t) = \alpha_1 \left\{ 1 - \beta_1 e^{-k_1 t} \right\}^3 + \alpha_2 e^{-\beta_2 e^{-k_2 t}} + \varepsilon$

Nestes modelos,  $W(t)$  é o volume acumulado (mL) no tempo  $t$ ;  $\alpha$ , volume de gases correspondente a completa digestão do substrato (mL);  $\alpha_1$  é o volume de gás produzido a partir da fração de rápida digestão dos carboidratos não fibrosos (CNF);  $\alpha_2$  é o volume de gás produzido a partir da fração de lenta degradação dos carboidratos fibrosos (CF);  $c$ ,  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são parâmetros de forma, sem interpretação biológica;  $K$ , taxa específica de produção de gás;  $K_1$  é a taxa de degradação da fração de rápida digestão (CNF);  $K_2$  é a taxa de degradação da fração de lenta digestão (CF);  $\lambda$ , tempo de colonização das bactérias;  $t$ , o tempo de fermentação;  $e$ , exponencial; e  $\varepsilon$ , é o erro aleatório associado a cada observação com distribuição normal, média zero e variância constante. Portanto, a cinética da produção cumulativa dos gases foi ajustada utilizando-se os modelos VGB e LB.

### 3.2.4 Estimação dos parâmetros dos modelos não lineares e avaliadores de qualidade de ajuste

Posteriormente, as estimativas dos parâmetros de cinética dos modelos não lineares VGB e LB foram obtidas por meio do método de mínimos quadrados, usando o processo

iterativo de Gauss Newton por meio da função Nonlinear Least Squares. Para realização das análises estatísticas utilizou-se o software R versão 3.4.1 (2017).

Em seguida, para avaliar qual modelo apresentou melhor ajuste, utilizou-se dos avaliadores: coeficiente de determinação ajustado ( $R_{aj.}^2$ ), quadrado médio do resíduo (QMR), desvio médio absoluto (DMA), critério de informação de Akaike (AIC) e critério de informação de Bayesiano (BIC) conforme Tabela 6.

Tabela 6 – Descrição matemática dos critérios de seleção.

Equações
$R_{aj.}^2 = R^2 - \frac{p-1}{n-p}(1 - R^2)$
$DMA = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-p}$
$QMR = \frac{\sum_{i=1}^n  y_i - \hat{y}_i }{n}$
$AIC = n + n \log(2\pi) + n \log\left(\frac{SQ_{res}}{n}\right) + 2(p + 1)$
$BIC = n + n \log(2\pi) + n \log\left(\frac{SQ_{res}}{n}\right) + (\log n)(p + 1)$

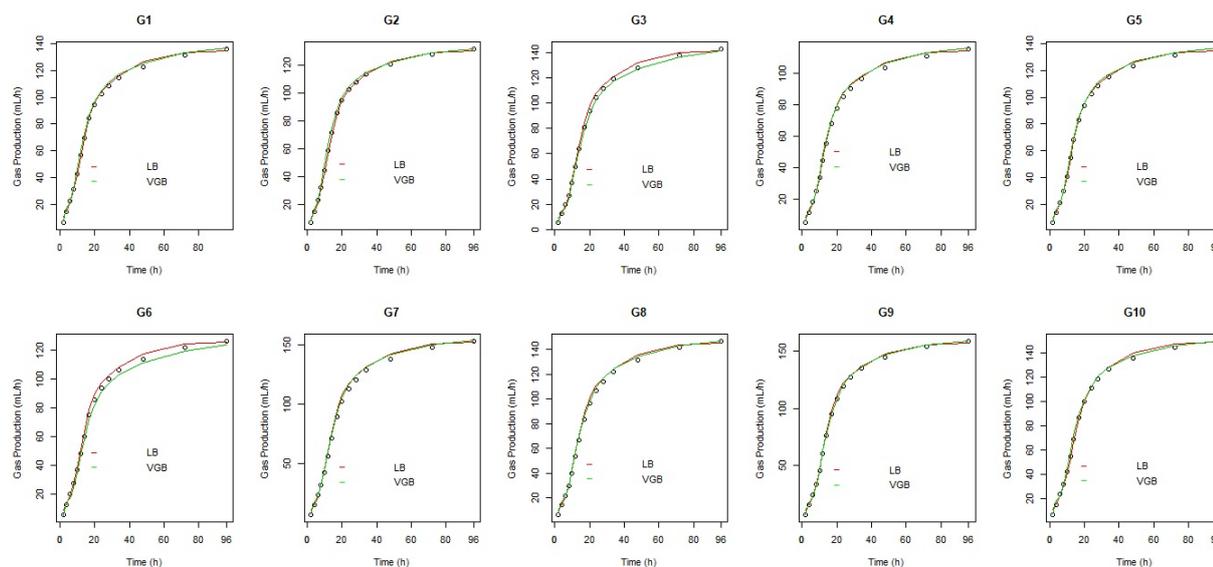
Os termos que surgem na Tabela 6, são descrito da seguinte maneira, a saber:  $SQ_{res}$  é a soma de quadrados dos resíduos definida por  $SQ_{res} = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2$ , em que  $y_i$  é o volume observado e  $\hat{y}_i$  é o volume estimado (previsão) de  $y_i$ ;  $n$ , o número de observações e  $p$ , o número de parâmetros livres do modelo. Deste modo, o melhor modelo ajustado será aquele que apresentar o maior valor para  $R_{aj.}^2$  e os menores valores para QMR, DMA, AIC e BIC.

### 3.3 Resultados e discussão

As curvas de produção cumulativa de gases obtidas a partir dos dados observadas e ajustadas de genótipos de amendoim forrageiro para os dois modelos apresentaram forma sigmoide ao longo do tempo podendo ser divididas em três estágios, a saber: estágio inicial de baixa produção de gases; estágio exponencial de rápida produção de gases e por fim estágio assintoticamente nulo ou baixa produção de gases (Figura 7). Os modelos LB e VGB, ajustaram-se a todos os estágios do processo fermentativo dos genótipos G1, G2, G4, G5, G7, G8, G9 e G10. Já para os genótipos G3, e G6, os modelos apresentaram bons ajustes tanto na parte inicial da curva quanto no estágio exponencial, mas há indícios que não apresentaram bons ajustes na fase assintótica, em que a produção de gases foi superestimada e subestimada, respectivamente, a partir dos modelos LB e VGB. No entanto, o comportamento do modelo também depende, em grande parte das características morfológicas (CAVALCANTE; LIRA et al., 2010) e química (SCHUNEMANN et al., 2006) em estudo utilizado, podendo o mesmo modelo apresentar tanto um baixo quanto um

elevado desempenho quando da utilização de genótipos de uma mesma espécie, ou quando da utilização de diferentes substratos (ÜÇKARDEŞ; EFE, 2014).

Figura 7 – Curvas de produção cumulativa de gases dos dez genótipos, ao longo do tempo de incubação, a partir dos dados observados e ajustados pelos modelos VGB e LB



A constatação das pressuposições para os modelos de regressão é um passo muito importante, pois, uma vez que não forem atendidas, joga-se que o modelo não é adequado e este desvio deve ser corrigido ou considerado no modelo. Assim, além de checar a adequação do ajuste pela Figura 7, é importante fazer uma análise dos resíduos para verificar os pressupostos do modelo. Para avaliar a qualidade do ajuste pela análise de resíduos, pode-se utilizar o diagrama de dispersão dos resíduos em função dos valores ajustados (Figura 8) e o gráfico quantil-quantil com envelope dos resíduos (Figura 9). Pelos gráficos de diagnóstico dos resíduos, não se têm razão para negar que os pressupostos do modelo foram atendidos.

Figura 8 – Diagrama de dispersão do modelo estatístico por meio dos resíduos para todos os genótipos

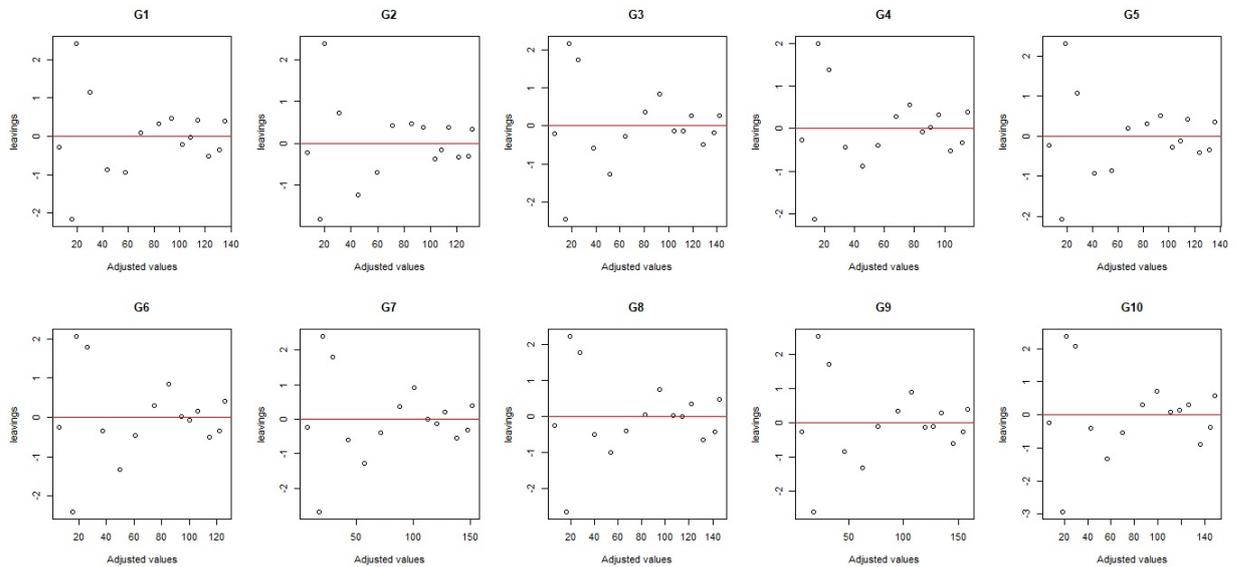
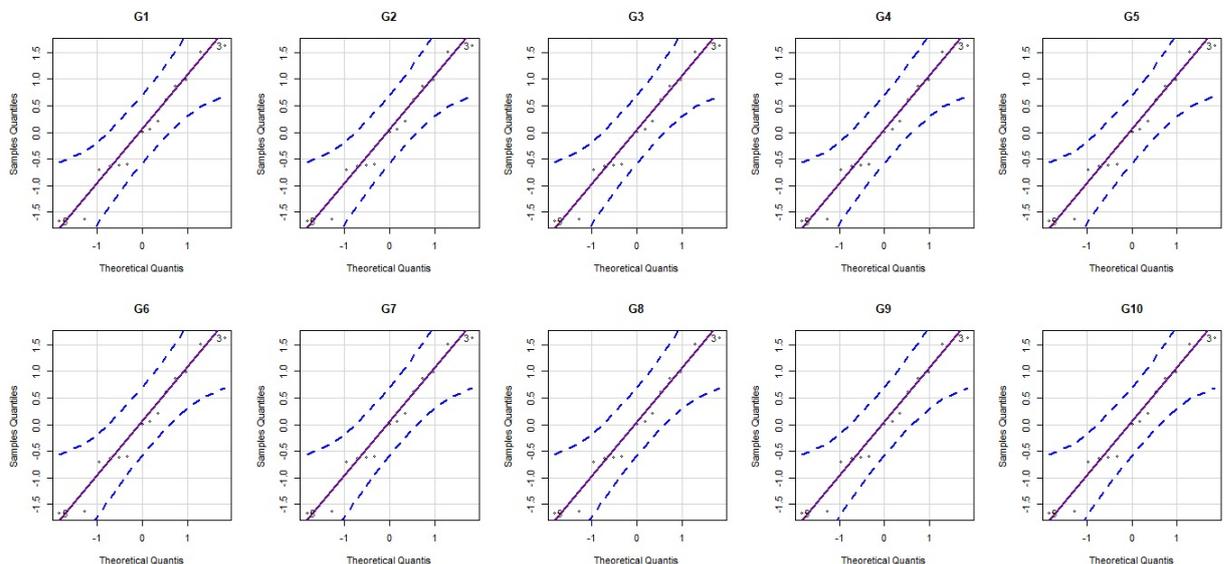


Figura 9 – Gráficos de normalidade do modelo estatístico por meio dos resíduos para todos os genótipos



Os modelos estudados obtiveram 100% de convergência, todos os parâmetros cinéticos de degradação estimados pelos diferentes modelos foram significativos a 95%. Os tempos de colonização  $\hat{\lambda}$  variaram de 4,40 a 5,46 h, com o G2 apresentando o menor valor e o G3, o maior. [Ferreira et al. \(2012a\)](#) ajustou o modelo LB em dez genótipos de *Arachis Pintoi* e também obtiveram valores de  $\hat{\lambda}$  semelhantes aos valores obtidos em nosso estudo variando de 4,4 a 5,5 h. Já valores inferiores foram encontrados por [Ferreira et al. \(2012b\)](#) para os acessos avaliados de *Arachis Pintoi* variando de 2,8 a 4,3 h. Considerando

todos os genótipos, as estimativas  $\hat{\alpha}_1$  ( $\hat{\alpha}_2$ ) para o modelo LB foram maiores (menores) do que as estimativas  $\hat{\alpha}_1$  ( $\hat{\alpha}_2$ ) para o modelo VGB. O volume total final de gases -  $W(t)$  - é produzido pelas frações de digestão rápida e lenta, ou seja, o somatório dos CNF e CF. O genótipo G4 apresentou o menor volume total  $W(t)$  de gases para os modelos VGB e LB, em contrapartida (para ambos modelos) os genótipos G7 e G9 apresentaram os maiores valores. Conforme [Nogueira, Maurício e Gonçalves \(2006\)](#) o volume de gases que é produzido depende de sua composição, isto é, quanto maior for os teores de amido e de fibra, menor e maior serão as produções de gases, respectivamente.

De acordo com a Tabela 7, as estimativas para as taxas de degradação rápida e lenta dos CNF e CF foram 0,20; 0,04 e 0,07; 0,02 para os modelos VGB e LB, respectivamente, observando-se não semelhança entre os diferentes genótipos para os dois modelos avaliados com valores superiores para o VGB. Os valores das estimativas para as taxas de degradação  $k_1$  ( $k_2$ ) do modelo VGB foram semelhantes aos encontrados por [Cabral et al. \(2000\)](#) obtidos para diferentes forrageiras, os quais relatam valores de 0,095 (0,04); 0,108 (0,04); 0,131 (0,04); 0,203 (0,04); 0,216 (0,04) e 0,222 (0,04), para silagens de milho, feno de alfafa, sorgo, cana-de-açúcar, feno de Coastcross e Capim Tifton-85, respectivamente. As estimativas para as taxas de degradação  $k_1$  e  $k_2$  do modelo LB foram semelhantes aquelas encontradas por [Ferreira et al. \(2012a\)](#) e [Ferreira et al. \(2012b\)](#) para os genótipos de amendoim forrageiro. Uma outra informação interessante é que  $\hat{k}_1 > \hat{k}_2$  para os modelos ajustados observando todos os genótipos (Tabela 7). Este fato corrobora com o importante aspecto da teoria em que o parâmetro  $k_1$  é maior do que o parâmetro  $k_2$ , ou seja, os CNF degradam mais rapidamente que os CF ([SCHOFIELD; PITT; PELL, 1994](#)). [RICACHESKI et al. \(2017\)](#) fizeram uso dessa recomendação em seu estudo.

Tabela 7 – Valores estimados dos parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  e  $\lambda$  para o modelo Logístico Bicompartimental (L.B.) e VGB ajustados em dados de genótipos de amendoim forrageiro.

Genótipos	Estimativas VGB				Estimativas LB				
	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{k}_1$	$\hat{k}_2$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{k}_1$	$\hat{k}_2$	$\hat{\lambda}$
G1	75,05	63,45	0,20	0,04	89,13	45,73	0,07	0,02	4,52
G2	75,75	57,91	0,20	0,04	89,30	41,42	0,07	0,02	4,40
G3	85,09	61,49	0,20	0,03	93,44	48,30	0,07	0,02	5,46
G4	63,73	54,21	0,20	0,04	75,02	39,75	0,07	0,02	4,84
G5	77,72	61,05	0,20	0,04	89,70	45,34	0,07	0,02	4,78
G6	71,53	57,56	0,20	0,04	84,64	41,21	0,07	0,02	4,77
G7	87,25	68,42	0,20	0,04	101,63	50,15	0,07	0,02	4,91
G8	80,70	68,56	0,20	0,04	94,78	50,84	0,07	0,02	5,01
G9	91,55	69,37	0,20	0,04	106,00	51,34	0,07	0,02	4,88
G10	83,01	68,37	0,20	0,04	101,00	47,62	0,06	0,02	4,67

Os avaliadores de qualidade de ajuste são apresentados na Tabela 8. A escolha dos melhores modelos não tem sido tarefa fácil, pois, cada um dos diferentes avaliadores de qualidade de ajuste propostos na literatura, preconiza determinada característica, como, por exemplo, a simplicidade do modelo (SILVEIRA et al., 2011a). Porém, quanto maior o número de avaliadores considerados, mais adequada é a indicação do(s) melhor(e)s modelo(s) (SILVEIRA et al., 2009). Ao comparar os dois modelos as menores diferenças foram encontradas para o  $R_{aj}^2$ , em que os modelos apresentaram os valores desse critério muito próximos, não evidenciando aquele de melhor ajuste. Contudo, para todos os genótipos, ao analisar os critérios QMR, DMA, AIC e BIC, observamos que o modelo VGB apresenta os menores valores (Tabela 8). O melhor modelo ajustado é aquele que apresenta menores valores para os critérios QMR, DMA, AIC e BIC e maior valor para  $R_{aj}^2$ . Assim, o conjunto dessas informações favorece a indicação de melhores ajustes para o novo modelo proposto.

Na literatura, poucos trabalhos foram encontrados com referência aos estudos de modelos matemáticos para ajuste da produção de gases *in vitro* em genótipos de amendoim forrageiro. Filho (2018) comparando diversos modelos para avaliar genótipos de amendoim forrageiro nos períodos de menor e maior precipitação pluviométrica em Itabela – BA, Brasil, encontrou o melhor ajuste por meio do LB, seguidos dos modelos Von Bertalanffy, Gompertz, Brody e Logístico. Já avaliando os modelos Brody, Von Bertalanffy, Gompertz, France, logístico, logístico modificado e LB para descrever a produção cumulativa de gases em silagens de girassol e milho, Mello et al. (2008) concluíram que o melhor modelo foi o LB. Os modelos multicompartimentais de acordo com Groot et al. (1996), Schofield, Pitt e

Pell (1994) apresentam maior qualidade de ajuste do que os modelos baseados em cinética de primeira ordem.

Tabela 8 – Critérios utilizados na seleção do modelo não linear mais adequado.

Critérios	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9	G10
$R_{aj.LB}^2$	0,9991	0,9993	0,9992	0,9990	0,9992	0,9991	0,9993	0,9991	0,9993	0,9992
$R_{aj.VGB}^2$	0,9994	0,9995	0,9995	0,9994	0,9995	0,9993	0,9994	0,9994	0,9995	0,9993
$QMR_{LB}$	2,70	2,01	2,73	2,12	2,51	2,27	2,82	3,18	3,02	3,02
$QMR_{VGB}$	1,63	1,42	1,91	1,40	1,50	1,87	2,22	2,02	2,27	2,53
$DMA_{LB}$	1,03	0,88	1,03	0,91	0,99	0,87	0,97	1,08	1,06	0,98
$DMA_{VGB}$	0,71	0,68	0,76	0,66	0,69	0,75	0,82	0,77	0,83	0,89
$AIC_{LB}$	63,32	58,92	63,56	59,75	62,27	60,78	64,06	65,83	65,05	65,06
$AIC_{VGB}$	56,25	54,16	58,63	53,95	55,01	58,27	60,86	59,48	61,25	62,86
$BIC_{LB}$	67,57	63,17	67,81	64,00	66,52	65,03	68,31	70,07	69,30	69,31
$BIC_{VGB}$	61,20	59,12	63,59	58,91	59,97	63,23	65,82	64,43	66,21	67,82

### 3.4 Conclusão

Os resultados obtidos indicaram que o modelo VGB pode ser uma alternativa para descrever curvas de produção gases *in vitro*. O modelo VGB, por apresentar bons avaliadores de qualidade e com base nas interpretações biológicas dos parâmetros apresentou-se superior ao LB para descrever curvas de crescimento. Deste modo, recomenda-se para o estudo de cinética de produção de gases de forrageiras em programas de melhoramento genético de acordo com a metodologia e condições em que foi desenvolvido o presente estudo.

# 4 CAPÍTULO - Novo modelo para avaliação das silagens de girassol e milho pela técnica "*in vitro*" de produção de gases

## Resumo

O objetivo deste trabalho é propor um modelo denominado Logístico-Von Bertalanffy bicompartimental (LVB) e identificar entre o modelo proposto e Logístico bicompartimental (LB), aquele apresenta maior qualidade de ajuste à curva de cinética de produção cumulativa de gases (PCG) das silagens de girassol, de milho e de suas misturas, através da técnica "*in vitro*" semiautomática de produção de gases. O delineamento experimental foi em blocos ao acaso com parcelas subdivididas e as dietas experimentais foram: SM - silagem de milho; 340SG - 660 g kg<sup>-1</sup> de silagem de milho e 340 g kg<sup>-1</sup> de silagem de girassol; 660SG - 340 g kg<sup>-1</sup> de silagem de milho e 660 g kg<sup>-1</sup> de silagem de girassol e SG - silagem de girassol. Os parâmetros foram estimados pelo método de mínimos quadrados utilizando o processo iterativo de Gauss-Newton, a partir do programa R versão 3.4.1. Os critérios adotados foram: o coeficiente de determinação ajustado ( $R_{aj}^2$ ), quadrado médio do resíduo (QMR), desvio médio absoluto (DMA), critério de informação de Akaike (AIC), critério Bayesiano de Schwarz (BIC) e a eficiência relativa (ER). Dentre os modelos ajustados, o modelo Logístico-Von Bertalanffy bicompartimental apresentou melhor qualidade de ajuste para descrever a PCG ao longo do tempo, de acordo com a metodologia e condições em que foi desenvolvido o presente estudo. **Palavras-chaves:** Alimentos alternativos, modelo proposto, forragem, rúmen, vacas leiteiras.



# Abstract

This study aimed to propose a model called two-compartment logistic-von Bertalanffy (LVB) and to identify among the proposed and two-compartment logistic (TL) models the one that has the best goodness of fit to the kinetic curve of cumulative gas production (CGP) of sunflower and corn silages alone and combined using the *in vitro* semi-automated gas production technique. A random block split-plot experimental design was employed and the experimental diets were: CS - corn silage; 340SS - 660 g kg<sup>-1</sup> corn silage and 340 g kg<sup>-1</sup> sunflower silage; 660SS - 340 g kg<sup>-1</sup> corn silage and 660 g kg<sup>-1</sup> sunflower silage; and SS - sunflower silage. The parameters were estimated by the least squares method using the iterative Gauss-Newton process in the software R version 3.4.1. The criteria adopted were: coefficient of determination ( $R_{aj}^2$ ), residual mean squares (RMS), mean absolute deviation (MAD), Akaike information criterion (AIC), Bayesian information criterion (BIC), and relative efficiency (RE). The two-compartment logistic-von Bertalanffy model had the best fit to describe the CGP over time according to the methodology and conditions of the present study. **Key-words:** Alternative feed, Proposed model, Forage, Rumen, Dairy cows.



## 4.1 Introdução

O girassol cultura com elevada tolerância ao déficit hídrico e a altas temperaturas vem se consolidando como cultura de expressão no Brasil, graças ao melhoramento genético e aumento da demanda por oleaginosas para produção de Biodiesel. Nesse cenário, o seu uso sob a forma de silagem torna-se alternativa para os períodos de déficit hídrico, que impossibilitam a produção de alimentos volumosos de boa qualidade e a manutenção da produção animal durante todo o ano (PEREIRA et al., 2016; COSTA et al., 2015; NEUMANN et al., 2009).

Vários trabalhos têm sido realizados para avaliar as características agrônômicas, o padrão de fermentação, a composição bromatológica e o valor nutricional da silagem de girassol (LEITE et al., 2017; ARAGADVAY-YUNGÁN et al., 2015; MARTINS et al., 2014; VIANA et al., 2012; WANDERLEY et al., 2012; NUNES et al., 2007; LEITE et al., 2006; TOMICH et al., 2003).

Porém, existem poucos estudos sobre a cinética de degradação ruminal da silagem de girassol como volumoso único da dieta ou associada (PEREIRA et al., 2016).

Modelos matemáticos com equações que descrevam satisfatoriamente a produção cumulada de gases (PCG) são indispensáveis para interpretação do valor nutritivo dos alimentos para ruminantes. O objetivo desse estudo foi propor novo modelo bicompartimental a partir da combinação dos modelos Logístico e Von Bertalanffy, em silagens de milho, girassol e de suas misturas.

## 4.2 Material e métodos

### 4.2.1 *Dados Utilizados*

A semeadura e a ensilagem do milho (cultivar AG 1051) foram realizadas entre os meses de outubro e fevereiro, já a semeadura e a ensilagem do girassol (genótipo M734, híbrido simples destinado à produção de óleo, de ciclo intermediário e porte médio) foram realizadas no período entre fevereiro e maio. As densidades de semeadura foram de, aproximadamente, 55.000 plantas ha<sup>-1</sup>, com o espaçamento de 0,90 m entre linhas e 0,20 m entre plantas, para a cultura do milho e de, aproximadamente, 45.000 plantas ha<sup>-1</sup>, com o espaçamento entre linhas de 0,90 m e 0,25 m entre plantas, para a cultura do girassol.

O girassol ensilado para a realização desse ensaio objetivou o estágio R9, onde aproximadamente há 100% de enchimento dos grãos e foi realizado entre 110 a 115 dias após o plantio. A ensilagem dos materiais utilizou-se máquina ensiladeira convencional

acoplada ao trator. As silagens foram armazenadas em silos tipo superfície, sendo utilizado um trator para a compactação do material depositado nos silos.

Foram utilizadas quatro vacas da raça holandesa em lactação, múltíparas, fistuladas no rúmen, com peso aproximado de 550 kg, produção média diária de 25 kg de leite e entre 60 e 82 dias de lactação como doadoras de líquido ruminal para preparo do inoculo [Mauricio et al. \(1999\)](#). Os animais foram mantidos individualizados em instalações tipo “tie-stall” contendo cocho de alimentação e bebedouro individualizados, sendo alimentados duas vezes ao dia (07h00 e 17h00).

Foram formuladas quatro dietas experimentais, atendendo as exigências dos animais, segundo o National Research Council ([NRC, 2001](#)). A relação volumoso: concentrado foi fixada em 56%:44% com base na matéria seca (MS). As dietas foram balanceadas para serem isoprotéicas, apresentando proporções crescentes de silagem de girassol em substituição à silagem de milho como alimento volumoso: Tratamento 1 - silagem de milho como volumoso único acrescido de concentrado (SM); Tratamento 2 - 660 g kg<sup>-1</sup> de silagem de milho e 340 g kg<sup>-1</sup> de silagem de girassol (340SG); Tratamento 3 - 340 g kg<sup>-1</sup> de silagem de milho e 660 g kg<sup>-1</sup> de silagem de girassol (660SG) e Tratamento 4 - silagem de girassol como volumoso único, acrescido de concentrado (SG) (Tabelas 9 e 10).

Tabela 9 – Composição química e parâmetros da fermentação das silagens de milho e girassol

Itens (g kg <sup>-1</sup> MS)	Silagem de milho	Silagem de girassol
MS (g kg <sup>-1</sup> de MN)	300,0	272,0
PB	69,0	88,0
FDN	569,0	493,0
FDA	332,0	373,0
EE	38,0	126,0
Ca	1,8	12,2
P	1,6	10,0
pH	3,97	4,56
N-NH3 (% do total de N)	6,05	16,86

MS: matéria seca; MN: matéria natural; PB: proteína bruta; FDN fibra em detergente neutro; FDA fibra em detergente ácido; EE extrato etéreo; Ca cálcio; P fósforo; N-NH3: nitrogênio amoniacal; N: nitrogênio.

Tabela 10 – Composição química das dietas experimentais com base na matéria seca

Itens (g kg <sup>-1</sup> MS)	SM	340SG	660SG	SG
MS	369,0	372,0	365,0	367,0
PB	161,0	161,0	168,0	165,0
FDN	477,0	456,0	441,0	428,0
FDA	265,0	278,0	275,0	299,0
CNFa	287,0	272,0	267,0	253,0
EE	27,0	44,0	59,0	74,0
Ca	6,0	6,3	6,3	6,2
P	4,4	4,4	4,5	4,6

MS: matéria seca; PB: proteína bruta; FDN: fibra em detergente neutro; FDA: fibra em detergente ácido; CNF: carboidratos não fibrosos; EE: extrato etéreo; Ca: cálcio; P: fósforo; SM: 1000 g kg<sup>-1</sup> de silagem de milho; 340SG: 340 g kg<sup>-1</sup> de silagem de girassol e 660 g kg<sup>-1</sup> de silagem de milho; 660SG: 660 g kg<sup>-1</sup> de silagem de girassol e 340 g kg<sup>-1</sup> de silagem de milho; SG: 1000 g kg<sup>-1</sup> de silagem de girassol a "NFC% = 100% - ["CP% + ("NDF% - NDCP%") + EE% + Ash%]", according to Sniffen et al. (1992).

A incubação foi feita em frascos de vidro com capacidade para 160 mL que foram saturados com dióxido de carbono e adicionados um grama de substrato. Foram utilizados dois frascos por tratamento, ou seja, dois para cada vaca em cada um dos quatro tratamentos (SM, 660SG, 340SG e SG) e mais dois frascos de branco (contendo apenas o meio de cultura e o inóculo) por inóculo.

O meio de cultura, constituído de mistura de solução tampão, macrominerais, resazurina e agentes redutores, foram preparados de acordo com recomendações de [Theodorou et al. \(1994\)](#). Este foi agitado constantemente e saturado com CO<sub>2</sub> por duas horas, até atingir coloração rosada, sendo adicionados 90 mL aos frascos de fermentação, com auxílio de proveta. Os frascos foram vedados com rolhas de silicone (14 mm) e mantidos a 4 ° C durante a noite, a fim de evitar que qualquer tipo de fermentação ocorresse. Cinco horas antes da inoculação, os frascos com as amostras e o meio de cultura foram removidos da geladeira para estufa a 39 ° C até o momento da inoculação. A inoculação foi feita usando o líquido ruminal de cada animal em cada tratamento.

O líquido ruminal foi retirado manualmente (através das fístulas) e armazenado em garrafas térmicas previamente aquecidas. O líquido ruminal foi filtrado através de duas camadas de panos de algodão sob injeção de CO<sub>2</sub> e mantido em banho-maria a 39 ° C. A inoculação foi realizada por meio da injeção de 10 mL do inóculo, por frasco, através de seringa plástica graduada e estéril. Imediatamente após a inoculação, os frascos tiveram a pressão estabilizada através da inserção de agulhas (25 x 7) nas tampas dos frascos. As agulhas foram posteriormente retiradas, os frascos manualmente agitados e colocados em estufa a 39 ° C e deu-se o início da contagem dos tempos de fermentação.

A pressão originada pelos gases foi medida através de um transdutor de pressão

(tipo T443A, Bailey & Mackey, Inglaterra) conectado em uma extremidade a uma agulha (25 x 7). As leituras de pressão foram tomadas nos tempos de: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 15, 19, 24, 30, 48, 72 e 96 horas. A partir da inserção da agulha na tampa de silicone, a pressão produzida no interior dos frascos foi lida no leitor digital e registrada em planilhas para cálculos posteriores do volume de gases proposto por [Maurício et al. \(2003\)](#).

#### 4.2.2 Modelo proposto

A ideia de combinar modelos de crescimento não lineares tem recebido considerável atenção na literatura, principalmente quando o crescimento apresenta um comportamento característico de forma a identificar etapas, as quais permitem dividir a curva em vários estágios, tornando-se necessário adotar modelos de crescimento multicompartimentais, por considerarem parâmetros exclusivos para cada compartimento ([KOOPS, 1986](#)). Por exemplo, modelos bicompartimentais, alguns dos quais, ajustados a cinética de produção de gases *in vitro* e outros com potencial aplicação a esta área, podem ser vistos na tabela 11.

Tabela 11 – Descrição dos modelos bicompartimentais

Modelos	Equações
Exponencial-Logístico (Zwirtering et al. 1990)	$W(t) = \alpha_1 \{1 - e^{-k_1 t}\} + \alpha_2 e^{\{-e^{1+K_2 \log(\lambda-t)}\}} + \varepsilon$
Gompertz (Fernandes et al. 2014)	$W(t) = \alpha_1 e^{-e^{k_1 \beta_1 t}} + (\alpha_1 - \alpha_2) e^{-e^{k_2 \beta_2 t}} + \varepsilon$
Exponencial (Pereira, 2013)	$W(t) = \{\alpha_1(1 - e^{-k_1 t}) + \lambda\} + \{\alpha_2(1 - e^{-k_2 t}) + \lambda\} + \varepsilon$
Logístico (Schofield et al. 1994)	$W(t) = \alpha_1 \{1 + e^{2-4k_1(t-\lambda)}\}^{-1} + \alpha_2 \{1 + e^{2-4k_2(t-\lambda)}\}^{-1} + \varepsilon$

Esta ideia foi explorada por [Schofield, Pitt e Pell \(1994\)](#) ao propor um modelo logístico bicompartimental para estudar cinética de produção de gases *in vitro* com base no pressuposto de que a taxa de produção deste foi afetada pela massa microbiana e o nível do substrato.

O modelo proposto desenvolvido foi resultante da combinação dos modelos Logístico Unicompartmental ([SCHOFIELD; PITT; PELL, 1994](#)) e Von Bertalanffy ([BERTALANFFY, 1957](#)), cujas fórmulas são expressas, respectivamente, por:

$$W_I(t) = \alpha_1 \{1 + e^{[2-4k_1(t-\lambda)]}\}^{-1} + \varepsilon \quad (4.1)$$

$$W_{II}(t) = \alpha_2 \{1 - \beta e^{-k_2(t-\lambda)}\}^3 + \varepsilon \quad (4.2)$$

De fato, seja  $W(t)$  uma estimativa do crescimento do volume acumulado de gases, logo, podemos escrever

$$W(t) = W_I(t) + W_{II}(t) = \alpha_1 \left\{ 1 + e^{[2-4k_1(t-\lambda)]} \right\}^{-1} + \alpha_2 \left\{ 1 - \beta e^{-k_2(t-\lambda)} \right\}^3 + \varepsilon \quad (4.3)$$

Assim, a Equação (4.3) constitui nosso modelo proposto, denominado modelo Logístico - Von Bertalanffy Bicompartimental, denotado por LVB por ser uma combinação das Equações (4.1) e (4.2). Neste modelo,  $W(t)$  é o volume acumulado (mL) no tempo  $t$ ;  $\alpha_1$  é o volume de gases produzido a partir da fração de rápida digestão dos carboidratos não fibrosos (CNF);  $\alpha_2$  é o volume de gases produzido a partir da fração de lenta degradação dos carboidratos fibrosos (CF);  $\beta$  é parâmetro de forma, sem interpretação biológica;  $k_1$  é a taxa de degradação da fração de rápida digestão (CNF);  $k_2$  é a taxa de degradação da fração de lenta digestão (CF);  $\lambda$ , tempo de colonização das bactérias;  $t$ , o tempo de fermentação; e, exponencial; e  $\varepsilon$ , é o erro aleatório associado a cada observação com distribuição normal, média zero e variância constante. Portanto, a cinética da produção cumulativa dos gases foi ajustada utilizando-se os modelos LGB e LB.

As estimativas dos parâmetros de cinética dos modelos não-lineares LVB e LB foram obtidas por meio do método de mínimos quadrados, usando o processo iterativo de Gauss Newton por meio da função Nonlinear Least Squares do software R versão 3.4.1 (2017).

### 4.2.3 Critérios para seleção de modelos

A seleção do modelo mais adequado teve como base, além da interpretação biológica dos parâmetros, a qualidade dos ajustes obedecendo aos seguintes critérios: o coeficiente de determinação ajustado ( $R_{aj}^2$ ), quadrado médio do resíduo (QMR), desvio médio absoluto (DMA), critério de informação de Akaike (AIC) e critério Bayesiano de Schwarz (BIC), conforme descrito por Santos et al. (2018) e a eficiência relativa (ER) segundo Mello et al. (2008).

### 4.2.4 Análise de resíduo

Além de checar a adequação do ajuste é importante fazer uma análise dos resíduos para verificar o atendimento dos pressupostos do modelo, normalmente desprezadas na maioria dos estudos de curvas de crescimento. Podem-se utilizar métodos gráficos para verificar os pressupostos do modelo ou testes tradicionais como Shapiro-Wilk, para verificar o pressuposto de normalidade residual, onde a hipótese nula é de que há normalidade; Durbin Watson, para verificar a independência e o teste estatístico de Breusch-Pagan, utilizado para verificar a heterocedasticidade dos erros, em que a hipótese nula é de que os resíduos sejam homocedásticos. Se tais considerações são ignoradas no processo de ajuste,

pode ocorrer, a obtenção de estimativas viesadas (PASTERNAK; SHALEV, 1994) e a subestimação das variâncias dos parâmetros (SOUZA, 1998).

### 4.3 Resultados e discussão

A análise de resíduo é um passo muito importante no processo de ajuste de modelos de regressão, de modo que, se algum desses pressupostos não for atendido, o modelo não é adequado e esse desvio deve ser corrigido ou considerado no modelo (FERNANDES et al., 2014).

De acordo com os resultados da análise de resíduos para os modelos LVB e LB ajustados aos dados (Figuras 10 e 11), verifica-se na primeira coluna (resíduos versus valores ajustados) que a observação 16 para todos os dados possui, os maiores resíduos, enquanto os demais pontos encontram-se de forma aleatória. Na segunda coluna, os dados possuem aproximadamente uma distribuição normal e a observação 16 encontra-se fora da normalidade. A figura da terceira coluna nos dá uma ideia de quão discrepantes (ou não) são os dados. Na última coluna, resíduo versus leverage, a observação 16 aparece como ponto de influência e alavanca.

Apesar da observação 16 surgir como ponto de influência e alavancar optou-se por conservá-la na análise uma vez que após sua retirada e subsequente reanálise dos dados, verificou-se não alteração significativa das estimativas dos parâmetros e consequentemente nenhuma alteração em termos de ajuste obtidos.

Mello et al. (2008) verificaram em uma visualização dos gráficos de dispersão dos resíduos que os modelos Brody e France tiveram dispersão idênticas em silagens de girassol e próxima em milho, com resíduos positivos e diferentes aos padrões de outros modelos nas primeiras horas de incubação. Já os modelos Von Bertalanffy, Gompertz, Logístico e Logístico modificado seguiram a mesma tendência de dispersão em ambos os substratos e ainda observaram maior dispersão residual até 60 (72) horas pós-incubação, certamente pela maior atividade microbiana durante esse período em silagem de girassol (silagem de milho), e que os resíduos foram mais homogêneos no intervalo de 60 à 144 (72 à 144) horas, possivelmente, pela menor atividade microbiana durante esses períodos em silagem de girassol (silagem de milho), respectivamente.

Figura 10 – Análise de resíduos para o modelo LVB e LB para os materiais SM e 340SG

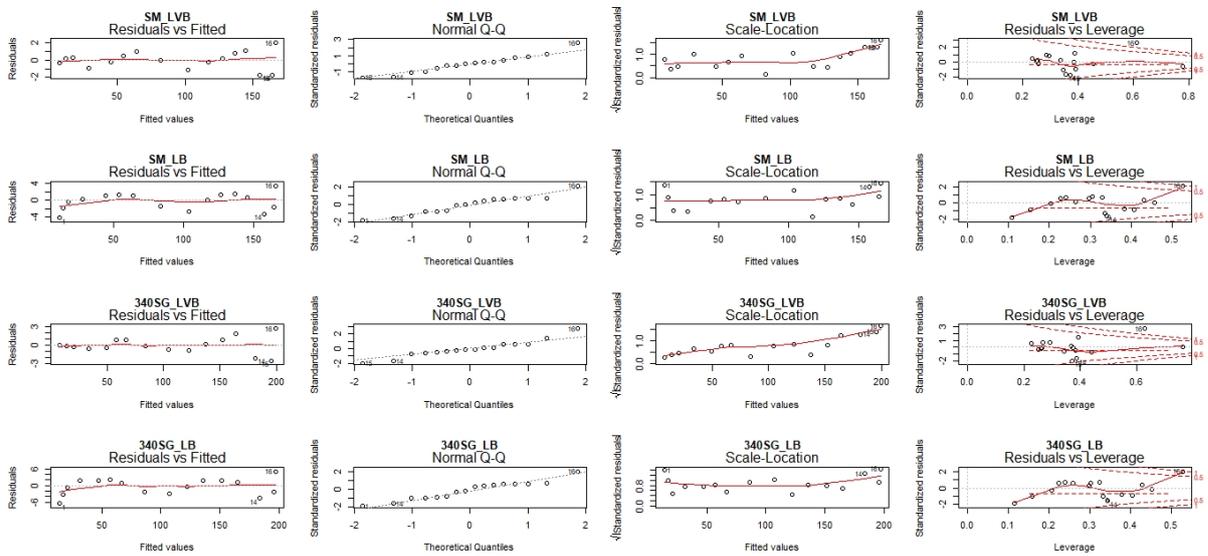
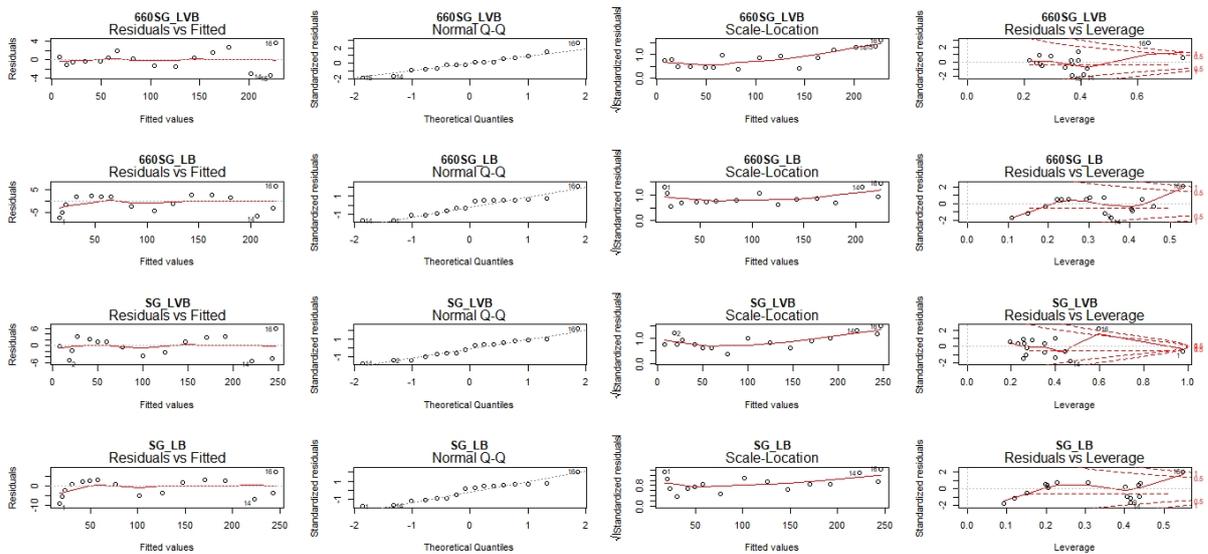


Figura 11 – Análise de resíduos para o modelo LVB e LB para os materiais 660SG e SG



Observa-se, em todas as situações estudadas (Tabela 12) para o modelo LVB, que os resíduos estimados apresentaram distribuição normal, são independentes e homocedásticos, ou seja, todos os pressupostos sobre os resíduos para o tratamento SG foram atendidos ( $p\text{-valor} > 0,05$ ), enquanto que os tratamentos SM, 340SG e 660SG apesar da rejeição de homocedasticidade ( $p\text{-valor} < 0,05$ ), apresentaram normalidade e independência. Já para o modelo LB, pelos resultados apresentados observa-se que não há evidências para rejeitar a hipótese de normalidade nem de ausência de homocedasticidade dos resíduos, porém observa-se a violação da suposição de independência dos erros para todos os tratamentos.

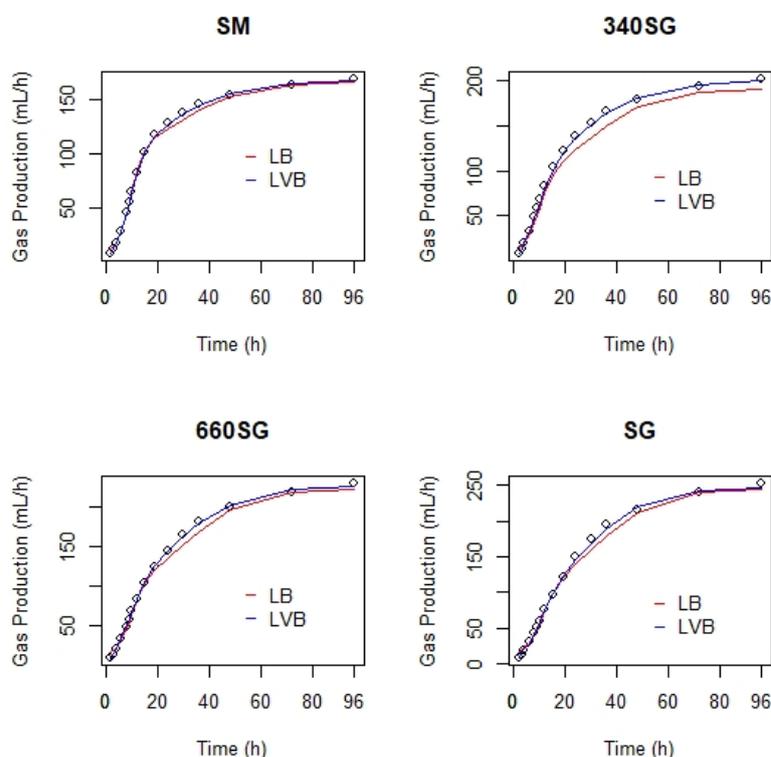
Tabela 12 – Valores das estatísticas dos testes de Shapiro-Wilk, Durbin-Watson e Breusch-Pagan, com os respectivos p-valor, aplicados aos resíduos dos modelos LVB e LB, ajustados ao PCG para SM, 340SG, 660Sg e SG

Critérios	Shapiro-Wilk	p-valor	Durbin-Watson	p-valor	Breusch-Pagan	p-valor
SM <sub>LVB</sub>	0,9674	0,7950	1,8455	0,2677	6,0622	0,0138
SM <sub>LB</sub>	0,9419	0,3730	1,1824	0,0185	0,7354	0,3911
340SG <sub>LVB</sub>	0,9646	0,7453	1,9083	0,3124	1,0454	0,0012
340SG <sub>LB</sub>	0,9389	0,3366	1,0983	0,0109	0,3366	0,5618
660SG <sub>LVB</sub>	0,9792	0,9574	1,8699	0,2848	8,8269	0,0029
660SG <sub>LB</sub>	0,9358	0,3014	1,1512	0,0153	0,7187	0,3966
SG <sub>LVB</sub>	0,9488	0,4709	1,6103	0,1323	2,5644	0,1093
SG <sub>LB</sub>	0,9145	0,1374	1,1428	0,0146	0,5289	0,4670

O comportamento das curvas da PCG (mL kg de MS<sup>-1</sup>), para os diferentes tratamentos, a partir dos dados observados e ajustados para os modelos LVB e LB podem ser visualizados na Figura 12. O que difere os modelos LVB e LB é o segundo compartimento. O modelo LB modela bem a fase inicial dos dados, porém como pode-se observar não modela tão bem as fases exponencial e assintótica. No entanto, a substituição do modelo logístico do segundo compartimento pelo modelo de Von Bertalanffy (Equação 4.3) resultou em ajustes para todos os estágios do processo fermentativo. Assim, o modelo LVB se ajustou a todos os estágios do processo fermentativo dos tratamentos. Já o modelo LB foi menos efetivo no ajuste às curvas nas fases exponencial e assintótica (Figura 12).

Mello et al. (2008) relatam superestimação na transição entre o final da fase exponencial e início da fase assintótica para os modelos Von Bertalanffy, Gompertz, Logístico e Logístico modificado, nos intervalos de 24 a 60 e 36 a 72 horas pós-incubação para silagem de girassol e milho respectivamente. Os autores relatam ainda que o modelo LB apresentou forma de curva adequada em todas as fases até 144 horas pós-incubação, com exceção de uma pequena tendência demonstrada nas 18 horas pós-incubação em silagem de milho.

Figura 12 – Curvas de produção cumulativa de gases para silagem de milho (SM), de girassol (SG) e associações (340SG e 660SG), ao longo do tempo de incubação, a partir dos dados observados e ajustados pelos modelos LVB e LB



Os parâmetros cinéticos de degradação com seus respectivos erros-padrão estimados pelos diferentes modelos encontram-se na Tabela 13. Os modelos apresentaram erros-padrão pequenos e aceitáveis para estimativas. O volume máximo de gases dos modelos LVB e LB para as frações de (rápida) e lenta digestão dos (CNF) e CF variaram de (113,86 a 168,79; 95,78 a 167,14) e de 53,79 a 108,95; 69,82 a 88,04, respectivamente. Já as taxas da produção de gases dos (CNF) e dos CF variaram de (0,02 a 0,08; 0,02 a 0,09) e de 0,06 a 0,20; 0,02 0,10, respectivamente. A "lag phase" ( $\lambda$ ) encontrada para o tratamento SM (3,18) foi maior que a do tratamento SG (2,90), sendo verificado o menor valor (2,00) para o tratamento 660SG, indicando que este último foi mais rapidamente colonizado.

Os dados referentes aos parâmetros da degradabilidade ruminal (Tabela 13) mostram que o aumento da participação da silagem de girassol nos tratamentos aumentou o volume total final de gases produzido pelo somatório dos CNF e CF. Aragadvay-Yungán et al. (2015) trabalharam com silagem de girassol como volumoso único, ou misturada à silagem de milho nas proporções de 25, 50 e 75% e verificaram maior produção de gás total para a silagem de milho, porém com menor taxa de fermentação desta, quando comparada à mistura contendo 25% de silagem de girassol. Os autores recomendaram a mistura de

silagem de girassol à silagem de milho, na proporção de 25%, como sendo aquela similar à silagem de milho como volumoso único.

Os resultados de produção obtidos nos estudos de digestibilidade sobre o uso da silagem de girassol, seja como volumoso único ou misturado a outro volumoso são variáveis. [Leite et al. \(2006\)](#) observaram que a substituição parcial da silagem de milho pela silagem de girassol (34SG) não afetou o consumo de MS, quando comparada ao tratamento 100SM. A silagem de girassol apresenta menor qualidade da sua fração fibrosa em relação à silagem de milho, o que implica em redução no seu valor nutritivo para ruminantes ([PEREIRA et al., 2016](#)). Por esse motivo, deve ser utilizada de forma diferenciada na alimentação de vacas leiteiras, em comparação à silagem de milho, sendo a associação de silagem de milho e girassol uma alternativa para a utilização da silagem de girassol em dietas de vacas leiteiras de alta produção.

Já [Martins et al. \(2011\)](#) verificaram consumo de MS inferior e perda de peso em vacas cruzadas, recebendo silagem de girassol como volumoso único, o que foi atribuído à baixa digestibilidade da fibra do volumoso. Por outro lado, [Leite et al. \(2017\)](#) verificaram maior consumo de nutrientes para dietas contendo silagem de girassol e manutenção da produção de leite em vacas leiteiras, em comparação à dietas contendo silagem de milho. O modelo LB obteve estimativas para o parâmetro  $k_1$  menores do que  $k_2$  para os tratamentos 340SG, 660SG e SG. Já o modelo LVB obteve estimativas para as taxas de degradação da fração de rápida digestão (CNF) maiores que as taxas de degradação da fração de lenta digestão (CF) para os tratamentos SM, 340SG e 660SG (Tabela 13), com exceção da taxa de degradação para o tratamento SG que resultaram em estimativas com difícil explicação biológica. Este fato corrobora com o importante aspecto da teoria em que a taxa dos CNF é maior do que a taxa dos CF, ou seja, os CNF degradam mais rapidamente que os CF ([MALAFAIA et al., 1998](#); [SCHOFIELD; PITT; PELL, 1994](#)). [RICACHESKI et al. \(2017\)](#) e [Rymer et al. \(2005\)](#) fizeram uso dessa recomendação em seus estudos.

Tabela 13 – Valores estimados e (desvio padrão) dos parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $\beta$  e  $\lambda$  para o modelo LVB e LB ajustados em dados de níveis (tratamentos)

Níveis	Estimativas LVB						Estimativas LB				
	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{k}_1$	$\hat{k}_2$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{k}_1$	$\hat{k}_2$	$\hat{\lambda}$
SM	113,86 (3,719)	53,79 (3,465)	0,08 (0,125)	0,06 (0,082)	1,25 (0,003)	3,18 (0,003)	95,78 (4,943)	69,82 (4,894)	0,09 (0,007)	0,02 (0,001)	4,56 (0,250)
340SG	118,33 (5,213)	82,05 (4,795)	0,07 (0,231)	0,06 (0,073)	1,35 (0,004)	2,36 (0,003)	109,05 (6,971)	88,04 (7,035)	0,02 (0,001)	0,09 (0,010)	4,62 (0,366)
660SG	118,98 (8,379)	108,95 (7,705)	0,07 (0,334)	0,06 (0,089)	1,37 (0,006)	2,00 (0,003)	143,05 (8,985)	80,37 (9,081)	0,02 (0,001)	0,10 (0,015)	5,01 (0,471)
SG	168,79 (9,380)	78,87 (9,906)	0,02 (1,710)	0,20 (0,480)	1,25 (0,001)	2,90 (0,016)	167,14 (12,54)	78,63 (12,93)	0,02 (0,001)	0,09 (0,017)	5,79 (0,539)

Os modelos obtiveram elevados valores para  $R_{aj.}^2$  apresentando valores superiores a 99%. Porém, uma vez que o  $R_{aj.}^2$  não avalia a coerência biológica dos dados é importante que este não seja utilizado como único critério de avaliação. Os maiores valores de QMR e DMA, AIC e BIC foram observados para o modelo LB, indicando que o ajuste dos dados ao modelo não foi o mais adequado. No entanto, o modelo LVB, apresentou os menores valores e consequentemente obteve o melhor ajuste para os alimentos testados considerando estes critérios (Tabela 14).

A ER é uma medida que reflete o grau relativo de precisão de um modelo em relação ao outro. Quando o valor de ER de um modelo sobre outro for maior que 1,0 é indicativo de que esse modelo foi mais eficiente em relação ao outro. Pode-se observar que, em todas as comparações para as silagens, os modelos LVB e LB apresentaram  $ER > 1,0$  e  $ER < 1,0$ , respectivamente (Tabela 15).

Na comparação dos modelos (Tabela 14 e 15), podem-se observar que o modelo LVB apresentou os menores valores de QMR, DMA, AIC e BIC além disso, obteve ER maior que um, indicando superioridade em relação ao LB.

Em um estudo para identificar entre os modelos Brody, Von Bertalanffy, Gompertz, France, Logístico, Logístico modificado e Logístico bicompartimental, aquele que apresenta maior qualidade de ajuste à curva de produção cumulativa de gases em silagens de girassol e milho Mello et al. (2008) concluíram que o modelo LB foi o melhor para descrever a PCG. Neste estudo, as comparações ocorreram segundo o coeficiente de determinação, QMR, erro percentual médio e número de iterações dos modelos ajustados para os diferentes substratos. Esses mesmos autores observaram que o modelo LB apresentou ER maior do que um em todas as comparações para silagens de girassol, enquanto que o modelo France foi mais eficiente em todas as comparações para silagens de milho.

Tabela 14 – Critérios utilizados na seleção do modelo não linear mais adequado

Critérios	Níveis			
	SM	340SG	660SG	SG
$R_{aj.LB}^2$	0,9987	0,9980	0,9973	0,9971
$R_{aj.LVB}^2$	0,9997	0,9996	0,9994	0,9985
$QMR_{LB}$	5,86	12,93	21,96	29,82
$QMR_{LVB}$	1,56	2,67	5,32	17,39
$DMA_{LB}$	1,63	2,51	3,36	3,89
$DMA_{LVB}$	0,77	0,96	1,43	2,83
$AIC_{LB}$	79,71	92,36	100,84	105,74
$AIC_{LVB}$	59,08	67,63	78,62	97,58
$BIC_{LB}$	84,35	96,99	105,47	110,37
$BIC_{LVB}$	64,48	73,04	84,03	102,99

Tabela 15 – Critérios utilizados na seleção do modelo não linear mais adequado

Modelos	Modelos							
	LVB	LB	LVB	LB	LVB	LB	LVB	LB
	(SM)		(340SG)		(660SG)		(SG)	
LVB	-	0,3	-	0,2	-	0,2	-	0,6
LB	3,7	-	4,8	-	4,1	-	1,7	-

## 4.4 Conclusão

O modelo LVB foi o que melhor estimou as taxas de produção acumulada de gases, podendo ser adotado na descrição da cinética de fermentação ruminal para alimentos como SM, 340SG, 660SG e SG. A associação das silagens de milho e girassol pode ser uma alternativa para a alimentação de vacas leiteiras.

## 5 CAPÍTULO - Considerações finais

Neste capítulo são apresentadas as conclusões do presente trabalho e as recomendações para a continuidade dos trabalhos nesta área de estudo.

Os resultados das análises realizadas neste estudo demonstram o poder dos novos modelos não lineares. Ou seja, os resultados indicaram que todos os modelos testados se ajustaram de maneira satisfatória aos dados, podendo ser utilizados para se estimar o crescimento de animais e descrever a produção cumulativa de gases ao longo do tempo. Além disso, estes modelos geram parâmetros de fácil interpretação biológica e estimativas mais precisas.

Com a inclusão de novos modelos de crescimento derivados de modelos existentes, constatou-se que os resultados foram de grande valor nutricional para a avaliação de alimentos utilizados na nutrição de ruminantes. Assim, mostra que o estudo de modelagem é dinâmico e nunca se pode admitir que o que já existe é suficiente, principalmente, quando se considera outros campos nas ciências biológicas, que podem gerar novos modelos baseados em hipóteses biológicas específicas para cada ramo de pesquisa.

Finalizando, o presente trabalho abre caminho para mais propostas de novos modelos para a consolidar ainda mais os métodos. Isto é, de uma forma geral, a presente tese, evidencia a necessidade da continuidade das pesquisas, abrindo-se uma imensa gama de possibilidades para novos estudos.

# Referências Bibliográficas

AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. **IEEE transactions on automatic control**, Ieee, v. 19, n. 6, p. 716–723, 1974.

ALBUQUERQUE, L. **Modelos de dimensão infinita aplicados a características de crescimento de bovinos da raça Nelore. 2003. 83f.** Tese (Doutorado) — Tese (Livre-docente)-Faculdade de Ciências Agrárias e Veterinárias, Universidade Estadual Paulista, Jaboticabal.[Links], 2003.

ALBUQUERQUE, M. A. D. Análise de agrupamento hierárquica e incremental-estudo de caso em ciências florestais. **Recife: Universidade Federal Rural de Pernambuco UFRPE, 2013. 160f.** Tese (Doutorado em Biometria e Estatística Aplicada) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Brasil, 2013.

ALVES, D. D. Crescimento compensatório em bovinos de corte compensatory growth in beef cattle. **Revista Portuguesa de Ciências Veterinárias**, v. 98, p. 61–67, 2003.

AMARAL, R. M. d. et al. Deposição tecidual em cordeiros santa inês, 1/2 dorper-santa inês e 1/2 white dorper-santa inês avaliados por ultrassonografia. **Revista Brasileira de Saúde e Produção Animal**, v. 12, n. 3, 2011.

ANDERBERG, M. R. **Cluster analysis for applications. Monographs and textbooks on probability and mathematical statistics.** [S.l.]: Academic Press, Inc., New York, 1973.

AOAC. **ASSOCIATION OF OFFICIAL ANALYTICAL CHEMISTS-AOAC. OFFICIAL METHODS OF ANALYSIS.** [S.l.]: 15. ed., Virginia. 1117p, 1990.

ARAGADVAY-YUNGÁN, R. G. et al. Evaluación in vitro del ensilaje de girasol (*helianthus annuus* l.) solo y combinado con ensilaje de maíz. **Revista mexicana de ciencias pecuarias**, Instituto Nacional de Investigaciones Forestales, Agrícolas y Pecuarias, v. 6, n. 3, p. 315–327, 2015.

BATES, D. M.; WATTS, D. G. **Nonlinear regression analysis and its applications.** [S.l.]: Wiley Online Library, 1988. v. 2.

BERTALANFFY, L. V. Quantitative laws in metabolism and growth. **The Quarterly Review of Biology**, v. 32, p. 217–230, 1957.

BIFFANI, S. Influência de fatores ambientais sobre o crescimento de bovinos da raça nelore e estimativa de parâmetros genéticos pelos métodos henderson 3 e reml. **Fortaleza: Universidade Federal do Ceará, 1997. 121p.** Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Brasil, 1997.

BRITO, C. C. R. d. et al. Growth resulting from the variation and combination of models of chapman-richards and silva-bailey applied to leucaena leucocephala (lam.) of wit. **Ciência Florestal**, SciELO Brasil, v. 17, n. 2, p. 175–185, 2007.

BRODY, S. **Bioenergetics and growth**. [S.l.]: Reinhold Publishing Corporation: New York, 1945.

BROWN, J.; FITZHUGH, H.; CARTWRIGHT, T. A comparison of nonlinear models for describing weight-age relationships in cattle. **Journal of Animal Science**, The American Society of Animal Science, v. 42, n. 4, p. 810–818, 1976.

BUSSAB, W. d. O.; MIAZAKI, É. S.; ANDRADE, D. F. **Introdução à Análise de Agrupamentos**. **Associação Brasileira de Estatística**. [S.l.]: IME-São Paulo (USP), 1990.

CABRAL, L. d. S. et al. Forage carbohydrate fractions and its degradation rates estimated by gas production technique. **Revista Brasileira de Zootecnia (Brazil)**, 2000.

CALIŃSKI, T.; HARABASZ, J. A dendrite method for cluster analysis. **Communications in Statistics-theory and Methods**, Taylor & Francis, v. 3, n. 1, p. 1–27, 1974.

CARNEIRO, P. L. S. et al. Curva de crescimento em caprinos, da raça mambrina, criados na caatinga. **Revista Brasileira de Saúde e Produção Animal**, v. 10, n. 3, 2009.

CARNEIRO, P. L. S. et al. Desenvolvimento ponderal e diversidade fenotípica entre cruzamentos de ovinos dorper com raças locais. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, SciELO Brasil, v. 42, n. 7, p. 991–998, 2007.

CAVALCANTE, D. H. et al. Modelos não paramétricos para ajustes de curva de crescimento em caprinos sem raça definida (srd). **Revista Acadêmica: Ciência Animal**, v. 11, n. 3, 2013.

CAVALCANTE, M.; LIRA, M. d. A. et al. Genetic variability in pennisetum purpureum schumacher. **Caatinga**, Universidade Federal Rural do Semi-Árido, v. 23, n. 2, p. 153–163, 2010.

CHALH, A.; GAZZAH, M. E. Variogram investigation of covariance shape within longitudinal data with possible use of a krigeage technique as an interpolation tool: Sheep growth data as an example. **Irish Journal of Agricultural and Food Research**, JSTOR, p. 51–64, 2014.

COSTA, R. V. et al. Girassol (*helianthus annuus* l.) e seus coprodutos na alimentação animal. **PUBVET**, PUBVET, v. 9, p. 287–347, 2015.

CRAPLET, C. **Traité d'élevage modern: Tome iii. la viande de bovins. livre i. Traité D'Élevage Moderne Tome III, La Viande de Bovins. Livre I**, Vigot Frères Editeurs Paris, 1966.

CRUZ, C.; REGAZZI, A.; CARNEIRO, P. Modelos biométricos aplicados ao melhoramento genético. viçosa: Ufv. 480p. 2004.

DRAPER, N. R.; SMITH, H. **Applied regression analysis**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1998. 706 p.

DUARTE, F. **Estudo da curva de crescimento de animais da raça Nelore, através de cinco modelos estocásticos**. 1975. 284f. Tese (Doutorado) — Tese (Livre Docência)—Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, SP, 1975.

DUDA, R. O.; HART, P. E. **Pattern Elessfication and Scene Analysis**. [S.l.]: Wiley, 1973.

EMILIANO, P. C. et al. Critérios de informação de akaike versus bayesiano: análise comparativa. **19º Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística**, 2010.

FARIAS, L. et al. Avaliação de bicompartimental logístico e gompertz matemáticos para estimar a produção de carne de babassu (*Orbignya martiana*) a partir de uma técnica semi-automatizada in vitro. **Arquivo Brasileiro de Medicina Veterinária e Zootecnia**, SciELO Brasil, v. 63, n. 1, p. 136–142, 2011.

FERNANDES, G. A. et al. Modelos não lineares na descrição do crescimento ponderal de bovinos de corte. **PUBVET**, PUBVET, v. 7, p. 2327–2445, 2013.

FERNANDES, T. J. et al. Seleção de modelos não lineares para a descrição das curvas de crescimento do fruto do cafeeiro. Editora UFLA, 2014.

FERREIRA, A. L. et al. Ranking contrasting genotypes of forage peanut based on nutritive value and fermentation kinetics. **Animal feed science and technology**, Elsevier, v. 175, n. 1-2, p. 16–23, 2012b.

FERREIRA, A. L. et al. Nutritional divergence in genotypes of forage peanut. **Revista Brasileira de Zootecnia**, SciELO Brasil, v. 41, n. 4, p. 856–863, 2012a.

FERREIRA, D. F. Estatística multivariada. **2. Ed. Lavras: UFLA**, p. 676, 2011.

FERRO, M. et al. Kinetics of sugarcane silage with dehydrated barley residue in vitro ruminal fermentation. **Archivos de zootecnia**, Servicio de Publicaciones, v. 66, n. 254, p. 237–242, 2017.

FIGUEIREDO FILHO, L. A. S. et al. Fatores ambientais e genéticos sobre a curva de crescimento de caprinos mestiços. **Comunicata Scientiae**, v. 3, n. 3, 2012.

FILHO, A. G. C. G. **Divergência genética e avaliação de modelos de degradação em genótipos de amendoim forrageiro (Arachis pintol)**. Dissertação (Mestrado) — (Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife., 2018.

FILHO, L. M. d. A. L. et al. Modelos simétricos não lineares de produção e crescimento em volume de clones de eucalyptus spp. Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2012.

FRANCE, J.; DIJKSTRA, J.; DHANOA, M. Growth functions and their application in animal science. In: **Annales de zootechnie**. [S.l.: s.n.], 1996. v. 45, n. Suppl1, p. 165–174, 1996.

- FRANCE, J. et al. Estimating the extent of degradation of ruminant feeds from a description of their gas production profiles observed in vitro: derivation of models and other mathematical considerations. **British Journal of Nutrition**, Cambridge University Press, v. 83, n. 2, p. 143–150, 2000.
- FREITAS, A. R. de. Curvas de crescimento na produção animal. **R. Bras. Zootec**, SciELO Brasil, v. 34, n. 3, p. 786–795, 2005.
- GROOT, J. C. et al. Multiphasic analysis of gas production kinetics for in vitro fermentation of ruminant feeds. **Animal Feed Science and Technology**, Elsevier, v. 64, n. 1, p. 77–89, 1996.
- GUEDES, M. et al. Análise bayesiana da curva de crescimento de cordeiros da raça santa inês. **Arquivo Brasileiro de Medicina Veterinária e Zootecnia**, Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Veterinária, v. 57, n. 3, p. 415–417, 2005.
- HAMMOND. **Farm Animals**. 2nd ed. London, Edward Arnold, 1955.
- HUBERT, L.; ARABIE, P. Comparing partitions. **Journal of classification**, Springer, v. 2, n. 1, p. 193–218, 1985.
- HUBERT, L. J.; LEVIN, J. R. A general statistical framework for assessing categorical clustering in free recall. **Psychological bulletin**, American Psychological Association, v. 83, n. 6, p. 1072, 1976.
- IBGE, I. B. de Geografia e E. Produção da pecuária municipal, rio de janeiro. v. 40, n. 1, p. 1–68, 2012.
- JACOVETTI, R. et al. Desempenho agrônomo e nutricional do capim "mulato ii" sob doses e fontes de nitrogênio. Universidade Federal de Goiás, 2016.
- JOHNSON, R.; WICHERN, D. Applied multivariate statistical methods. **Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ**, 1992.
- JOHNSON, R.; WICHERN, D. Principal components. **Applied multivariate statistical analysis**, 4th ed. New Jersey: Prentice Hall, p. 817, 1998.
- KOOPS, W. Multiphasic growth curve analysis. **Growth**, v. 50, n. 2, p. 169–177, 1986.
- LAIRD, A. K. Dynamics of relative growth. **Growth**, v. 29, p. 249–263, 1965.
- LAIRD, A. K. Postnatal growth of birth and mammals. **Growth**, v. 30, p. 349–363, 1966.
- LEITE, L. et al. Silagens de girassol e de milho em dietas de vacas leiteiras: consumo e digestibilidade aparente. **Arquivo Brasileiro de Medicina Veterinária e Zootecnia**, Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Veterinária, v. 58, n. 6, p. 1192–1198, 2006.
- LEITE, L. A. et al. Performance of lactating dairy cows fed sunflower or corn silages and concentrate based on citrus pulp or ground corn. **Revista Brasileira de Zootecnia**, SciELO Brasil, v. 46, n. 1, p. 56–64, 2017.

- MALAFAIA, P. et al. Ruminant kinetics of some feeds investigated by gravimetric and metabolic techniques. **REVISTA BRASILEIRA DE ZOOTECNIA-BRAZILIAN JOURNAL OF ANIMAL SCIENCE**, *REVISTA BRASILEIRA ZOOTECNIA BRAZILIAN JOURNAL ANIMAL SCI UNIVERSIDADE*, v. 27, n. 2, p. 370–380, 1998.
- MALHADO, C. et al. Growth curves in dorper sheep crossed with the local brazilian breeds, morada nova, rabo largo, and santa inês. **Small Ruminant Research**, Elsevier, v. 84, n. 1, p. 16–21, 2009.
- MALHADO, C. H. M. et al. Curvas de crescimento para caprinos da raça anglo-nubiana criados na caatinga: rebanho de elite e comercial. **Revista Brasileira de Saúde e Produção Animal**, v. 9, n. 4, 2008a.
- MALHADO, C. H. M. et al. Curva de crescimento em ovinos mestiços santa inês x texel criados no sudoeste do estado da bahia. **Revista Brasileira de Saúde e Produção Animal**, v. 9, n. 2, 2008b.
- MANLY, B. F. J. **Multivariate statistical methods: a primer**. [S.l.]: Second edition. London: Chapman & Hall, p. 215, 1994.
- MARCONDES, C. Análise de alguns critérios de seleção para características de crescimento na raça nelore. **Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais, 1999. 93p. Dissertação (Mestrado em zootecnia) - Universidade Federal de Minas Gerais, Brazil, 1999.**
- MARTINS, A. d. S. et al. Glycerol inclusion levels in corn and sunflower silages. **Ciência e Agrotecnologia**, SciELO Brasil, v. 38, n. 5, p. 497–505, 2014.
- MARTINS, S. C. d. S. G. et al. Consumo, digestibilidade, produção de leite e análise econômica de dietas com diferentes volumosos. **Revista Brasileira de Saúde e Produção Animal**, v. 12, n. 3, 2011.
- MAURÍCIO, R. et al. Obtenção da equação quadrática entre volume e pressão para a implantação da técnica in vitro semi-automática de produção de gás para avaliação de forrageiras tropicais. **Reunião Anual da Sociedade Brasileira de Zootecnia**, v. 38, p. 1340–1341, 2001.
- MAURICIO, R. M. et al. A semi-automated in vitro gas production technique for ruminant feedstuff evaluation. **Animal Feed Science and Technology**, Elsevier, v. 79, n. 4, p. 321–330, 1999.
- MAURÍCIO, R. M. et al. Potencial da técnica in vitro semi-automática de produção de gases para avaliação de silagens de sorgo (*sorghum bicolor* (l.) moench). **Embrapa Milho e Sorgo-Artigo em periódico indexado (ALICE)**, SciELO Brasil, 2003.
- MCMANUS, C. M.; LOUVANDINI, H.; CAMPOS, V. A. L. Non linear growth curves for weight and height in four genetic groups of horses. **Ciência Animal Brasileira**, v. 11, n. 1, p. 80–89, 2010.
- MELLO, R. et al. Models for fit of gas production in sunflower and corn silages. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, SciELO Brasil, v. 43, n. 2, p. 261–269, 2008.

- MERTENS, D. (Ed.). **Rate and extension of digestion.** In: FORBES, J.M.; FRANCE, J. (Eds.). **QUALITATIVE ASPECTS OF RUMINANT DIGESTION AND METABOLISM.** [S.l.]: 1993, Cambridge. [Proceedings...], Cambridge-UK: CAB International, p. 13-51, 1993.
- MOJENA, R. Hierarchical grouping methods and stopping rules: An evaluation. **The Computer Journal**, Oxford University Press, v. 20, n. 4, p. 359–363, 1977.
- NELDER, J. The fitting of a generalization of the logistic curve. **Biometrics**, JSTOR, v. 17, n. 1, p. 89–110, 1961.
- NETO, M. R. T. et al. Descrição do crescimento de ovinos santa inês utilizando modelos não-lineares selecionados por análise multivariada. **Revista Brasileira de Saúde e Produção Animal**, v. 17, n. 1, p. 26–36, 2016.
- NEUMANN, M. et al. Sunflower (*helianthus annuus* l.) for production of silage of the entire plant. **Applied Research & Agrotechnology**, v. 2, n. 3, p. 181–202, 2009.
- NOGUEIRA, U.; MAURÍCIO, R.; GONÇALVES, L. Comparison among substrates with different soluble carbohydrates concentration using the in vitro semi-automatic gas production technique. **Arquivo Brasileiro de Medicina Veterinária e Zootecnia**, SciELO Brasil, v. 58, n. 4, p. 633–641, 2006.
- NRC, N. R. C. **NATIONAL RESEARCH COUNCIL. Nutrient requirements of dairy cattle. 7. ed. rev.** Washington, DC.: [S.l.]: National Academy of Science, p. 381, 2001.
- NUNES, H. et al. Alimentos alternativos na dieta dos ovinos: uma revisão. **Asociación Latinoamericana de Producción Animal**, v. 15, n. 4, p. 147–158, 2007.
- Ó, A. Oliveira do et al. Curva de crescimento de ovinos santa inês no vale do gurgueia. **Revista Brasileira de Saúde e Produção Animal**, v. 13, n. 4, 2012.
- OLIVEIRA, D. F. de et al. Desenvolvimento ponderal e características de crescimento de caprinos da raça anglonubiana criados em sistema semi-intensivo. **Revista Brasileira de Saúde e Produção Animal**, v. 10, n. 2, p. 256–265, 2009.
- OLIVEIRA, H. N. Análise genético-quantitativo da curva do crescimento de fêmeas da raça guzerá. **Ribeirão Preto: Faculdade de Medicina veterinária USP, 1995. 73f. Tese (Doutorado em Ciências) - Faculdade de Medicina veterinária, Brazil, 1995.**
- PASTERNAK, H.; SHALEV, B. The effect of a feature of regression disturbance on the efficiency of fitting growth curves. **Growth, development, and aging: GDA**, v. 58, n. 1, p. 33–39, 1994.
- PEREIRA, D. R. et al. Uso do girassol (*helianthus annuus*) na alimentação animal: Aspectos produtivos e nutricionais. **Veterinária e Zootecnia**, v. 23, n. 2, p. 174–183, 2016.

- PERETTI, J. et al. **Revista Brasileira de Saúde e Produção Animal**, SciELO Brasil, v. 18, n. 1, p. 89–102, 2017.
- PIMENTEL, C. M. M. et al. Curvas de crescimento de ovinos bergamácia criados no distrito federal. **Revista Brasileira de Zootecnia**, v. 32, n. 5, p. 1207–1212, 2003.
- PIRES, L. C. et al. Growth curve of repartida goats reared in the caatinga region, brazil. **Semina: Ciências Agrárias**, v. 38, n. 2, p. 1041–1050, 2017.
- RICACHESKI, S. T. et al. Chemical composition and ruminal degradation kinetics of white oat (avena sativa l.) ipr 126. **Revista Brasileira de Saúde e Produção Animal**, SciELO Brasil, v. 18, n. 1, p. 50–61, 2017.
- RICHARDS, F. A flexible growth function for empirical use. **Journal of experimental Botany**, Oxford University Press, v. 10, n. 2, p. 290–301, 1959.
- ROCHA, N. S. Avaliação do crescimento de caprinos leiteiros por meio de modelos não lineares pressupondo diferentes estruturas de variância. **Rio de Janeiro: Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, 2013. 23f. Tese (Doutorado - Ciências Animal) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Brazil, 2013.**
- RONDON, E.; MURAKAMI, A.; SAKAGUTI, E. Modelagem computacional para produção e pesquisa em avicultura. **Revista Brasileira de Ciência Avícola**, Fundação APINCO de Ciência e Tecnologia Avícolas, v. 4, n. 1, 2002.
- RYMER, C. et al. In vitro cumulative gas production techniques: History, methodological considerations and challenges. **Animal Feed Science and Technology**, Elsevier, v. 123, p. 9–30, 2005.
- SANDLAND R.L.; MCGILCHRIST, C. Stochastic growth carane analysis. **International Biometric Society**, Washington, v. 35, p. 225–271, 1979.
- SANTANA, A. d. S.; COSTA, G.; FONSECA, L. Correlações entre peso e medidas corporais em ovinos jovens da raça santa inês. **Revista Brasileira de Biometria, Lavras**, v. 1, n. 5, p. 74–77, 2001.
- SANTANA, T. J. S. et al. A von bertalanffy model with response plateau to describe growth curves of beef cattle. **Revista Brasileira de Biometria**, v. 34, n. 4, p. 646–655, 2016.
- SANTOS, A. L. P. dos et al. Method to generate growth and degrowth models obtained from differential equations applied to agrarian sciences. **Semina: Ciências Agrárias**, v. 39, n. 6, p. 2659–2672, 2018.
- SARMENTO, J. et al. Avaliação genética de características de crescimento de ovinos santa inês utilizando modelos de regressão aleatória. **Arquivo Brasileiro de Medicina Veterinária e Zootecnia**, Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Veterinária, v. 58, n. 1, p. 68–77, 2006a.

- SARMENTO, J. L. R. et al. Estudo da curva de crescimento de ovinos santa inês. **Revista Brasileira de Zootecnia**, v. 35, n. 2, p. 435–442, 2006b.
- SAVAGEAU, M. A. Growth equations: a general equation and a survey of special cases. **Mathematical Biosciences**, Elsevier, v. 48, n. 3-4, p. 267–278, 1980.
- SCHOFIELD, P.; PITT, R.; PELL, A. Kinetics of fiber digestion from in vitro gas production. **Journal of animal science**, Oxford University Press, v. 72, n. 11, p. 2980–2991, 1994.
- SCHUNEMANN, A. P. et al. Pungência e características químicas em bulbos de genótipos de cebola (*allium cepa* L.) cultivados no alto vale do itajaí, sc, brasil. **Current Agricultural Science and Technology**, v. 12, n. 1, 2006.
- SCHWARZ, G. et al. Estimating the dimension of a model. **The annals of statistics**, Institute of Mathematical Statistics, v. 6, n. 2, p. 461–464, 1978.
- SFORZA, C. L.; EDWARDS, A. W. F. Analysis of human evolution. **Genet. Today**, v. 3, p. 923–933, 1964.
- SILVA, J. d. **Dynamics of stand structure in fertilized slash pine plantations. 1986. 133f.** Tese (Doutorado) — Thesis (Doctor of Philosophy)-University of Georgia, 1986.
- SILVA, N. et al. Bayesian hierarchical model applied to genetic evaluation of of beef cattle growth curves. **Arquivo Brasileiro de Medicina Veterinária e Zootecnia**, SciELO Brasil, v. 62, n. 2, p. 409–418, 2010.
- SILVEIRA, F. et al. Classificação multivariada de modelos de crescimento para grupos genéticos de ovinos de corte. **In: 54 RBRAS (Reunião Anual da Região Brasileira da Sociedade Internacional de Biometria) e 13º SEAGRO (Simpósio de Estatística Aplicada a Experimentação Agrônômica), 2009, São Carlos-SP. Anais da 54 RBRAS e 13º SEAGRO. São Carlos-SP: UFScar, 2009.**
- SILVEIRA, F. G. d. et al. Classificação multivariada de modelos de crescimento para grupos genéticos de ovinos de corte. Universidade Federal de Viçosa, 2010.
- SILVEIRA, F. G. d. et al. Cluster analysis applied to nonlinear regression models selection to growth curves of crossed lambs. **Ciência Rural**, SciELO Brasil, v. 41, n. 4, p. 692–698, 2011.
- SILVEIRA, F. Gomes da et al. Análise de agrupamento na seleção de modelos de regressão não-lineares para curvas de crescimento de ovinos cruzados. **Ciência Rural**, Universidade Federal de Santa Maria, v. 41, n. 4, p. 692–698, 2011.
- SOEST, P. v. V.; ROBERTSON, J.; LEWIS, B. Methods for dietary fiber, neutral detergent fiber, and nonstarch polysaccharides in relation to animal nutrition. **Journal of dairy science**, Elsevier, v. 74, n. 10, p. 3583–3597, 1991.
- SOUSA, J. E. R. de et al. Aspectos genéticos da curva de crescimento de caprinos anglo-nubiano. **Revista Brasileira de Saúde e Produção Animal**, v. 12, n. 2, p. 340–349, 2011.

- SOUZA, G. d. S. **Introdução aos modelos de regressão linear e não-linear**. [S.l.]: EMBRAPA-SPI Brasília, 1998.
- SOUZA, L. d. A. et al. Traditional and alternative nonlinear models for estimating the growth of morada nova sheep. **Revista Brasileira de Zootecnia**, SciELO Brasil, v. 42, n. 9, p. 651–655, 2013.
- SOUZA, L. de A. et al. Curvas de crescimento em ovinos da raça morada nova criados no estado da bahia1. **R. Bras. Zootec**, v. 40, n. 8, p. 1700–1705, 2011.
- TEIXEIRA, M. C. et al. Curva de crescimento de cordeiros oriundos de três sistemas de produção na região nordeste do brasil. **Semina: Ciências Agrárias**, Universidade Estadual de Londrina, v. 33, n. 5, p. 2011–2018, 2012.
- THEODOROU, M. K. et al. A simple gas production method using a pressure transducer to determine the fermentation kinetics of ruminant feeds. **Animal feed science and technology**, Elsevier, v. 48, n. 3-4, p. 185–197, 1994.
- TOMICH, T. et al. Potencial forrageiro de cultivares de girassol produzidos na safrinha para ensilagem. **Embrapa Milho e Sorgo-Artigo em periódico indexado (ALICE)**, Arquivo Brasileiro de Medicina Veterinária e Zootecnia, Belo Horizonte, 2003.
- TORAL, F. L. B. Número e intervalo de pesagens para estimação de parâmetros de curvas de crescimento em bovinos. **Revista Brasileira de Zootecnia**, v. 37, n. 12, p. 2120–2128, 2008.
- ÜÇKARDEŞ, F.; EFE, E. Investigation on the usability of some mathematical models in in-vitro gas production techniques. **Slovak Journal of Animal Science**, **47**, **172**, v. 179, 2014.
- VIANA, P. et al. Fracionamento de carboidratos e de proteína das silagens de diferentes forrageiras. **Revista Brasileira de Zootecnia**, v. 41, n. 2, p. 292–297, 2012.
- WANDERLEY, W. L. et al. Consumo, digestibilidade e parâmetros ruminais em ovinos recebendo silagens e feno em associação à palma forrageira. **Revista Brasileira de Saúde e Produção Animal**, v. 13, n. 2, 2012.
- WANG, M.; TANG, S.; TAN, Z. Modeling in vitro gas production kinetics: Derivation of logistic–exponential (1e) equations and comparison of models. **Animal Feed Science and Technology**, Elsevier, v. 165, n. 3-4, p. 137–150, 2011.