

Aranildo Rodrigues de Lima Junior

**Modelo do voto da maioria com distribuição mista de
ruído**

RECIFE-PE - FEV/2011

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA

Modelo do voto da maioria com distribuição mista de ruído

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada como exigência parcial à obtenção do título de Mestre.

Área de Concentração: Modelagem Estatística e Computacional

Orientador: Prof. Dr. Tiago Alessandro Espínola Ferreira

Co-orientador: Prof. Dr. Francisco George Brady Moreira

RECIFE-PE - FEV/2011.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA

Modelo do voto da maioria com distribuição mista de ruído

Aranildo Rodrigues de Lima Junior

Dissertação julgada adequada para obtenção do título de mestre em Biometria e Estatística Aplicada, defendida e aprovada por unanimidade em 11/02/2011 pela Comissão Examinadora.

Orientador:

Prof. Dr. Tiago Alessandro Espínola Ferreira
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Luciano Rodrigues da Silva
Universidade Federal do Rio Grande do
Norte
DFTE-UFRN

Prof. Dr. Adauto José Ferreira de Souza
Universidade Federal Rural de Pernambuco
DEINFO-UFRPE

Prof. Dr. Borko D. Stosic
Universidade Federal Rural de Pernambuco
DEINFO-UFRPE

Dedico a minha mãe, ao meu pai e a você.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a todos que acreditaram, em especial a minha família por ser obrigada a me escutar sempre reclamado, poucas vezes elogiando, mas torcendo para que tudo desse certo.

Agradeço ao meu orientador Tiago Alessandro por nunca ter perguntado minhas notas para julgar se eu era capaz de realizar algum trabalho. Também pela paciência, conselhos, ensinamentos, etc. Com ele aprendi nas nossas longas conversas não só o lado científico mas como também o lado humano de buscar sempre ajudar aqueles que trabalham conosco. Lembrando sempre da célebre frase “*o que você quer dizer com isso*”, pois a partir dela tenho certeza que aumentei meus conhecimentos.

Agradeço ao meu orientador Francisco George Brady por ensinar muitas vezes a seriedade de se fazer uma pesquisa, o comprometimento e principalmente que humildade na área acadêmica é uma virtude para poucos. Novamente pela paciência e com certeza pelas nossas conversas no almoço sempre com uma boa cerveja (as vezes a cerveja nem era tão boa assim).

À Fernanda por fazer parte de alguns sonhos e por sua compreensão nas vezes que estive estressado.

Aos amigos do grupo de pesquisa David e Paulo pois sabem que a “o ato de ter apêndices duros e recurvados que se projetam da cabeça” nunca acaba.

Aos amigos que fazem parte do ANEXO B: Paulo, César, André e Lidiane e Enia tenho certeza que vou sentir falta do escritório em Gaibú. Em especial gostaria de agradecer ao outro membro, o Professor Aduino José Ferreira de Souza, pois com suas estórias aprendi mais do que simplesmente Física ou estatística.

Aos meus colegas de mestrado Cícero, Danielle, Jáder, Alvino, Mariese, Leila, Patrícia, Rita, Rogério e de doutorado Cícero Carlos, Dâmocles, Elias, Mácio, Kléber e Paulo.

Em especial a Rosilda pois ela “é show”, ao fanfarrão Rodrigo por ter que me escutar reclamando durante longas viagens e ao Professor Gabriel Rivas, não só pelas bolachas quando tínhamos que ficar até muito tarde no departamento mas também por sua colaboração constante e bom humor.

Aos funcionários da biometria Marco que sempre teve boa vontade em resolver os problemas e Zuleide.

Aos amigos músicos pois estes estiveram em muitos momentos felizes durante minha dissertação.

A Renato, Professor Catão e Romildo por terem cedido getilmente o computador e o laboratório de redes complexas para as simulações.

Ao toddynho pois em muitos momentos era a única fonte de energia disponível e sem ele tenho certeza que essa dissertação também não seria possível.

E finalmente a todos aqueles que de forma direta e indireta contribuíram para a execução deste trabalho.

*"Melhor parar por aí
Pague o táxi e siga seu caminho
Mas não se esqueça do conselho do magrão
Quem dá ajuda é pai
Quem faz caridade é monge..."*

Paulo de Carvalho

Resumo

No modelo do voto da maioria com ruído, definido em uma rede, um dado sítio (spin) toma o estado contrário (sinal) à maioria dos seus vizinhos com probabilidade q e concorda com o estado da maioria dos seus vizinhos com probabilidade $(1 - q)$, onde q é o parâmetro de ruído homogêneo para todos os sítios. Nessa dissertação investigamos o modelo do voto da maioria com distribuição mista de ruídos, no qual cada sítio tem o parâmetro q satisfazendo uma distribuição mista de probabilidade de forma que há uma distribuição heterogênea com relação aos ruídos dos sítios da rede. Consideramos o caso de uma distribuição dada por $\mathbb{P}(q_i) = b\delta(q_i) + (1 - b)\delta(q_i - q)$, onde b é a fração de sítios com ausência de ruído e q é dado por uma distribuição Gaussiana. Realizamos simulações de Monte Carlo para diversos valores do parâmetro b , em grafos aleatórios de diferentes tamanhos N e três valores da conectividade média. Calculamos a magnetização, a susceptibilidade e o cumulante de Binder como funções de q . Notamos que o sistema apresenta uma transição de fase do tipo ordem-desordem em um valor crítico do parâmetro de ruído q_c , o qual é uma função crescente da fração de sítios com ausência de ruído. A partir da teoria de escala de tamanho finito construímos o diagrama de fases do modelo no plano q_c versus b e estimamos os expoentes críticos β/ν , γ/ν e $1/\nu$. Esses expoentes satisfazem a relação de hiper-escala com a dimensionalidade efetiva do sistema $D = 1$ para todos os valores da conectividade média e b . Por fim concluímos que o modelo do voto da maioria com distribuição mista de ruído, pertence a uma classe de universalidade diferente do modelo com distribuição homogênea de ruído em grafos aleatórios.

Palavras-chave: Modelo do voto da maioria; Transição de fase; Expoentes críticos; Método de Monte Carlo; Teoria de escala; Grafos aleatórios; Distribuição de probabilidade mista.

Abstract

In the majority-vote model with noise, defined in a network, a given site (spin) assumes the opposite state (sign) of the majority of its neighboring spins with probability q and it takes the same state with probability $(1 - q)$. The noise parameter q is homogeneous for all sites. In this work, we investigate a more general and realistic version of the majority-vote model, in which a given site i has its own noise parameter q_i satisfying a mixed probability distribution. In this way, there is a heterogeneous distribution of noise among the sites in the network. We consider the case of a distribution defined by $\mathbb{P}(q_i) = b\delta(q_i) + (1 - b)\delta(q_i - q)$, where b is the fraction of sites without noise and q is taken from a Gaussian distribution. We perform Monte Carlo simulations on random graphs of different sizes and three average connectivity, for several values of the parameter b . We calculate the magnetization, the susceptibility and the Binder's fourth-order cumulant as functions of q . We note that the system presents an order-disorder phase transition at a critical value of the parameter noise q_c , which is an increasing function of the fraction of sites without noise. We use finite-size scaling theory to construct the phase diagram of the model and estimate the critical exponents β/ν , γ/ν and $1/\nu$. These exponents satisfy the hyperscaling relation with effective dimensionality equals to unity, for all values of average connectivity and b . Finally we conclude that, the majority-vote model with mixed distribution of noise on random graphs belongs to a different universality class from the model with homogeneous distribution of noise.

Key words: Majority-vote model, Phase transition; Critical exponents; Monte Carlo method; Finite-size scaling; Random graphs, Mixed probability distribution.

Lista de Figuras

1.1	Malha energética brasileira e as principais regiões onde ocorreram os problemas de abastecimento de energia (Fonte http://www.estadao.com.br/noticias/geral,furnas - diz - que - nao - teve - danos - em - torres - de - transmissao ,464711,0.htm).	2
2.1	Exemplos de Grafos k -regulares, com 6 vértices e $k=0,1,2$ e 3	8
2.2	Fração de sítios no componente gigante em função da conectividade de um grafo aleatório.	11
2.3	Densidade de probabilidade da distribuição normal para quatro diferentes valores de μ e σ	14
4.1	Magnetização em função do ruído para $b = 0.1$, no grafo aleatório com $\langle k \rangle = 4$ e quatro diferentes valores de N . No detalhe mostramos a dependência de M_N com o tamanho do sistema na região crítica.	34
4.2	Magnetização em função do ruído para $N = 2500$ na rede aleatória com $\langle k \rangle = 4$, e valores da fração de indivíduos sem ruído $b = 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ e 0.5 (da esquerda para a direita).	35
4.3	Susceptibilidade em função do ruído para $b = 0.1$, no grafo aleatório com $\langle k \rangle = 4$ e $N = 1000, 1750, 2500$, e 5000	36
4.4	Susceptibilidade em função do ruído para $N = 2500$ na rede aleatória com $\langle k \rangle = 4$. Da esquerda para a direita $b = 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ e 0.5	36
4.5	Cumulante de quarta ordem de Binder em função do parâmetro de ruído para $b = 0.1$ e diferentes valores de N na rede aleatória com $\langle k \rangle = 4$. No detalhe apresentamos apenas a região próxima ao ponto crítico.	37
4.6	Cumulante de quarta ordem de Binder na região crítica para grafos aleatórios com $\langle k \rangle = 20$ e $b = 0.1$. Os dados foram obtidos nas simulações Monte Carlo e as linhas são ajustadas através de uma suavização.	38

4.7	Cruzamento das curvas do cumulante de quarta ordem de Binder em uma grafo aleatório com $\langle k \rangle = 10$, para os tamanhos $N = 1000, 2500, 6400$, e 10000 e da esquerda para a direita $b = 0.0, 0.1$, e 0.2	38
4.8	Diagrama de fases para o modelo do voto da maioria com distribuição mista de ruídos. Na região abaixo das curvas o sistema se encontra em um estado ordenado (região de consenso), para pontos acima temos a fase desordenada (ausência de consenso). A curva correspondente ao campo médio é dada pela equação 3.41.	40
4.9	Dependência da função Λ_{N_1, N_2} com o ruído no grafo aleatório, para $\langle k \rangle = 4$, $b = 0.1$ e tamanhos de redes indicados. As linhas são ajustadas através de um ajuste polinomial.	41
4.10	Dependência da função Γ_{N_1, N_2} com o ruído no grafo aleatório, para $\langle k \rangle = 4$, $b = 0.1$ e tamanhos de redes indicados. As linhas são ajustadas através de um ajuste polinomial.	41
4.11	Dependência da função $\ln[U'_N(q_c)] + \langle k \rangle$ com $\ln[N]$ no grafo aleatório, para diferentes valores de b e $\langle k \rangle = 4$ e 10 . O coeficiente angular da reta calculado pelo ajuste linear dos dados obtidos numericamente definem o valor do expoente $1/\nu'$	43
4.12	Colapso de dados para o parâmetro de ordem no grafo aleatório, para $\langle k \rangle = 4$ e $b = 0.1$	44
4.13	Colapso de dados para a susceptibilidade no grafo aleatório, para $\langle k \rangle = 4$ e $b = 0.1$	44

Lista de Tabelas

4.1	Valores críticos do parâmetro de ruído obtidos através da aproximação de campo médio (CM) e de simulações Monte Carlo (MC)	32
4.2	Expoentes críticos do modelo do voto da maioria com ruído na rede quadrada ^a , na rede aleatória ^b , e do modelo de Ising ^c	33
4.3	Valores críticos do parâmetro de ruído obtidos através de simulações Monte Carlo, para diferentes valores da fração de sítios com ausência de ruído em grafos aleatórios com $\langle k \rangle = 4, 10$ e 20 . Os resultados de campo médio (CM) são também indicados.	39
4.4	Expoentes críticos do modelo do voto da maioria com distribuição mista de ruído em grafos aleatórios.	42

Sumário

1	Redes Sociais, Complexas e Conexões	1
1.1	Introdução	1
1.2	Objetivos	5
1.3	Estrutura da Dissertação	5
2	Probabilidade, Processos Estocásticos e Equação Mestra	6
2.1	Redes e Grafos	6
2.1.1	Grafos Simples, Não-Direcionados e Finitos	7
2.1.2	Grafos Regulares	7
2.2	Grafos Aleatórios	8
2.2.1	O Modelo de Erdős e Rényi	8
2.2.2	Conectividade	9
2.2.3	O Componente Gigante	10
2.3	Probabilidade e Variáveis Aleatórias	11
2.4	Distribuição Normal	13
2.5	Distribuições de Probabilidade Mistas	14
2.6	Processos Estocásticos	15
2.7	Matriz Estocástica	16
2.8	A Equação Mestra	17
2.9	Valores Médios	19
3	O Modelo do Voto da Maioria	20
3.1	Introdução	20

3.2	O Modelo	21
3.3	Expoentes Críticos e Efeitos de Tamanho Finito	24
3.4	Aproximação de Campo Médio	27
4	Resultados	30
4.1	Algoritmos Usados	30
4.1.1	Grafos Aleatórios	30
4.1.2	Simulações Monte Carlo	31
4.2	Resultados Anteriores do Modelo do Voto da Maioria	32
4.3	Nossos Resultados	33
4.3.1	Magnetização	33
4.3.2	Susceptibilidade	35
4.3.3	O Cumulante de Binder	37
4.4	Diagrama de Fases	39
4.5	Expoentes Críticos	40
4.6	Colapso de Dados	43
5	Conclusões	46
	Referências Bibliográficas	48
		52

1 Redes Sociais, Complexas e Conexões

1.1 Introdução

A meteórica ascensão da internet, a série de crises financeiras na América Latina, América do Norte e Ásia, são exemplos práticos de como o mundo está conectado. Particularmente na história recente, o mundo tem-se caracterizado de um forma mais globalizada e conectada que outrora fora. Essas conexões estão algumas vezes dispostas de forma que poucas pessoas previram ou até mesmo conseguem entender. O fato dessas conexões trazerem conseqüências diretas na vida cotidiana, tem chamado a atenção dos cientistas e nas academias tem emergido uma nova ciência, a *Ciência das Redes* (WATTS, 2003).

Um exemplo dessa conectividade e suas possíveis conseqüências aconteceu em uma terça-feira, na noite de 10 de novembro de 2009. Um imenso blecaute afetou cerca de 40% do território brasileiro e 90% do território paraguaio. O início do blecaute se deu às 22h13min em uma subestação de Furnas localizada no município de Itaberá, São Paulo. A possível causa foi uma falha em um dos circuitos responsáveis pela transmissão da energia de Itaipu. A figura 1.1 mostra as principais linhas afetadas pelo apagão da malha energética brasileira.

Inicialmente apontada como responsável, a usina de Itaipu demonstrou que não ocorreu nenhuma falha no sistema de geração de energia, mas que a falha correu no sistema de transmissão, especificamente nas linhas de Furnas. A Associação Brasileira das Grandes Empresas de Transmissão de Energia Elétrica (Abrate) descartou as hipóteses de queda de linhas de transmissão e de sobrecarga devido a um tempestade de raios ocorrida simultaneamente em diversas linhas de transmissão, já que isso ocorre rotineiramente. A Abrate manteve a explicação de que uma falha inicial em um disjuntor ou subestação teria desencadeado um efeito dominó que desligou preventivamente outras linhas, sem definir

exatamente como isto teve início. O ONS (Operador Nacional do Sistema Elétrico) defende que o desligamento de parte do Sistema Interligado Nacional (SIN) teve início com a pane de três linhas de 750 quilovolts (kV) e do elo de corrente contínua da rede que leva energia da Usina Binacional de Itaipu ao SIN no Sudeste e Centro-Oeste do país.

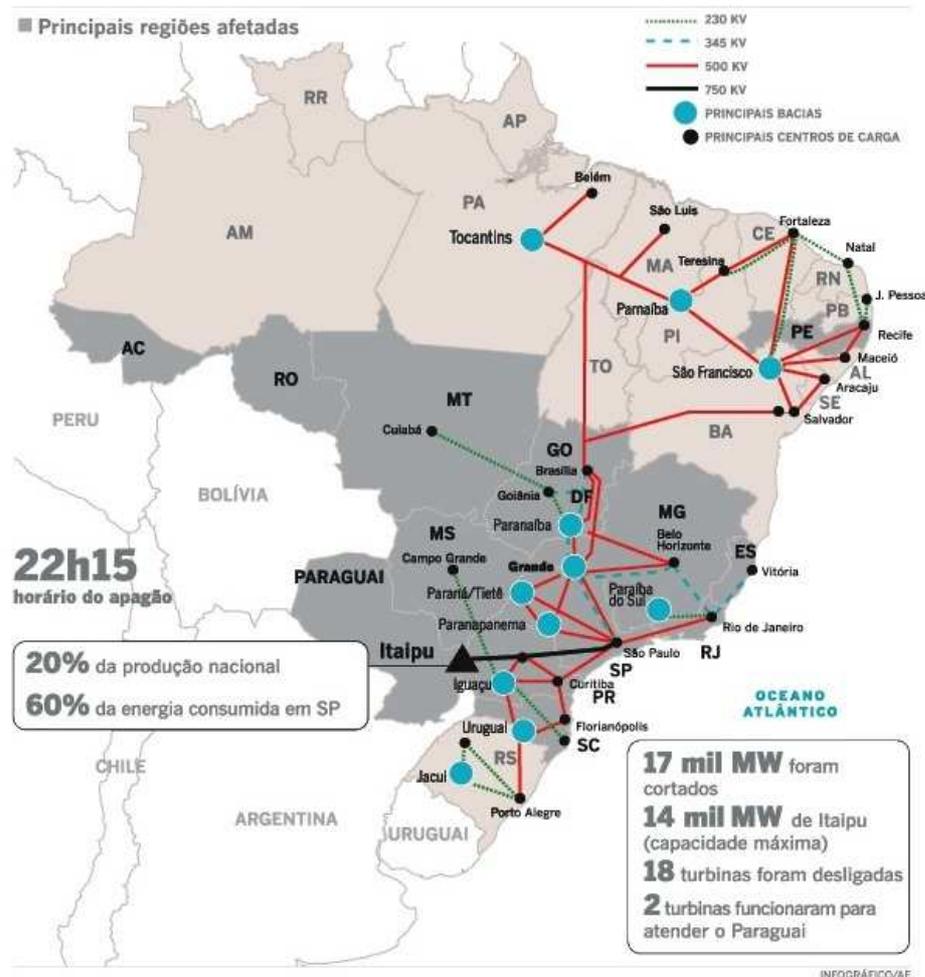


Figura 1.1: Malha energética brasileira e as principais regiões onde ocorreram os problemas de abastecimento de energia (Fonte [http://www.estadao.com.br/noticias/ geral,furnas - diz - que - nao - teve - danos - em - torres - de - transmissao ,464711,0.htm](http://www.estadao.com.br/noticias/geral,furnas-diz-que-nao-teve-danos-em-torres-de-transmissao,464711,0.htm)).

As conseqüências foram enormes, agências bancárias tiveram problemas nos caixas eletrônicos. A Caixa Econômica Federal por exemplo ficou sem prestar atendimento durante o dia 11 devido a um problema tecnológico. Vários municípios de três estados ficaram sem abastecimento de água. A Sabesp (empresa de economia mista responsável pelo fornecimento de água, coleta e tratamento de esgotos de 366 municípios do Estado de São Paulo) informou que a falta de energia provocou o desligamento de todas as estações de tratamento e estações elevatórias da companhia. A Sabesp afirmou que o abastecimento

seria normalizado já na manhã da quinta-feira. Após 36 horas, por volta das 12h30min da quinta-feira, alguns bairros ainda permaneciam sem água (G1, 2009). No Rio de Janeiro, o blecaute prejudicou o abastecimento de água para 1 milhão de consumidores devido ao desligamento dos sistemas, informou a Cedae (Companhia Estadual de Águas e Esgotos). No Espírito Santo, a Cesan (Companhia Espírito Santense de Saneamento), companhia de abastecimento do Estado, informou que a estação de tratamento de Carapina teve equipamentos danificados e permaneceu fora de operação por cerca de 12 horas, prejudicando o abastecimento no município de Serra e na região norte da capital, Vitória (ONLINE, 2009). Segundo a Companhia Paulista de Trens Metropolitanos (CPTM), os trens pararam por volta das 22h30min da terça-feira e só voltaram a funcionar na madrugada do dia seguinte (TERRA, 2009). Em Pernambuco 36 municípios foram atingidos e 30% do estado ficou sem luz. A Celpe (Companhia Energética de Pernambuco) informou que o apagão durou 35 minutos, tempo suficiente para que três grandes hospitais públicos precisassem usar geradores para não prejudicar o atendimento médico. No Hospital Getúlio Vargas, um dos maiores do Recife, as cirurgias tiveram que ser suspensas (PE360GRAUS.COM, 2009). Nas zonas norte e oeste do Rio de Janeiro três escolas e cinco creches municipais não funcionaram no dia seguinte, devido a um problema no fornecimento de água, deixando 1.729 alunos sem aula (DEZAN, 2009).

Problemas desse nível não ocorrem apenas no Brasil, um caso semelhante ocorreu em 10 de agosto de 1996, no oeste da América do Norte. Uma grande falha ocorrida no sistema da WSCC (*Western System Coordinating Council*) resultou na perda de 30.390 MW de potência afetando 7,49 milhões de consumidores no noroeste americano (KOSTEREV et al., 1999) gerando um prejuízo de milhões de dólares.

Em particular as redes de transmissão elétrica tem evoluído através dos anos devido ao crescimento dos países e da economia. São sistemas complexos caracterizadas por várias sub-redes combinadas e conectadas. Suas unidades podem constituir conjuntos de algumas centenas de estações, milhares de quilômetros de cabos, conglomerados de geradores de força e distribuidores de energia. Esses sistemas basicamente são constituídos de vários componentes cujos comportamentos individuais são razoavelmente bem entendidos porém, os comportamentos coletivos, como multidões em estádios de futebol ou investidores nos mercados de ações, podem ser ordenados, caóticos, confusos ou até mesmo destrutivos (WATTS, 2003).

A utilização, complexidade e otimização das redes de transmissão elétrica têm sido amplamente estudadas por engenheiros e cientistas; mais ainda, os possíveis distúrbios generalizados que podem ocorrer nesses sistemas, pois acarretam custos e impactos si-

gnificativos para a sociedade em geral (CARRERAS et al., 2004; WATTS; STROGATZ, 1998). Dentre esses distúrbios, a regularidade ou dinâmica em uma série de blecautes do fornecimento de energia elétrica a uma nação, tendem a ser de interesse tanto por causa da complexidade e tamanho desafio (DOBSON et al., 2001). Os eventos ocorridos no Brasil e na América do Norte não foram seqüências de eventos aleatórios independentes, ou simplesmente agregados que acarretaram o ponto principal da crise, mas sim uma falha inicial que gerou uma outra falha desencadeando uma série sucessiva de falhas adicionais. Outro fator importante é conseguir afirmar como tais falhas sob certas condições podem ser iniciadas e como outras falhas são receptivas a essas inicializações. O problema agora será constituído de não apenas uma falha mas da combinação de falhas, tornado a solução ou previsão ainda mais difícil e complexa.

Então como é possível entender tais problemas? O que acontece com esses sistemas complexos conectados que os torna tão difíceis de entendê-los a princípio? Como essa montagem de um grande conjunto de componentes em um sistema resulta em algo completamente diferente do ponto de vista de cada componente individualmente? Como uma população de vaga-lumes sincroniza os seus ritmos sem a ajuda de um condutor central? Como pequenos surtos de uma doença tornam-se epidemias ou alguns hábitos tornam-se manias? Como especuladores conseguem atuar em um mercado de estratégias de investimento enfraquecendo o mesmo e como se espalham esses danos através do mercado financeiro? Quão vulneráveis são as grandes estruturas de uma rede elétrica a falhas aleatórias ou até mesmo ataques de vandalismo? Apesar das perguntas parecerem diferentes, elas são versões da mesma pergunta: Como o comportamento individual é agregado ao comportamento coletivo? Em um nível mais alto é possível encontrar uma série de disciplinas como ecologia, epidemiologia, sociologia, economia, onde cada indivíduo (ou agente) vem com suas próprias regras (NEWMAN, 2002; DURRETT, 2006; BELLOMO, 2007; KAUFFMAN, 1993) e os princípios não são redutíveis a meros conhecimentos de psicologia ou biologia (CASTELLANO et al., 2009).

O que torna o problema difícil e o que faz os sistemas complexos realmente complexos, são as partes que o constituem como um todo, não se somando de uma forma simples. No entanto elas interagem umas com as outras, e nessa interação, mesmo com simples componentes pode-se gerar comportamentos confusos. Felizmente, por exemplo, seres humanos que são tipicamente complexos e imprevisíveis por natureza, ao formar grupos ou estarem juntos consistem em um caso de estudo onde podemos entender os princípios básicos de comportamento ignorando muitos dos mais complicados detalhes (LILIJEROS et al., 2001; GALAM, 1986). Esse é exatamente o outro lado dos sistemas complexos,

onde o conhecimento das regras que governam o comportamento dos indivíduos não necessariamente ajuda a prever o comportamento do grupo, mas talvez estejamos aptos a prever o mesmo comportamento grupal sem conhecer muito sobre a personalidade e características dos indivíduos que o constituem.

1.2 **Objetivos**

O objetivo geral deste trabalho é investigar o comportamento de uma distribuição mista de probabilidade (SCHNATTER, 2006) para um determinado ruído q no modelo do voto da maioria com ruído (TOME et al., 1991) em grafos aleatórios (PEREIRA; MOREIRA, 2005). Utilizando simulações de Monte Carlo, iremos calcular a magnetização, susceptibilidade e cumulante de quarta ordem de Binder a fim de identificar se o sistema possui transição de fase. Além do valor do parâmetro crítico no qual a transição ocorre, iremos calcular os expoentes críticos para verificar a dimensão efetiva do modelo apresentado juntamente com a classe de universalidade, isto é, se o modelo pertence ou não a classe do modelo de Ising.

1.3 **Estrutura da Dissertação**

Essa dissertação segue a seguinte estrutura: No Capítulo 2 iniciaremos com algumas definições de redes e grafos aleatório. Após isso discutiremos algumas propriedades da teoria de probabilidade e estatística. Desta forma iremos obter a equação mestra que será utilizada na análise de campo médio. Em seguida no Capítulo 3, introduziremos o modelo do voto da maioria e as grandezas necessárias para o estudo do nosso problema. Por fim no Capítulo 4 mostramos os resultados obtidos comparando-os com trabalhos anteriores. Finalmente, mas não menos importante, no Capítulo 5 são mostradas as conclusões do trabalho.

2 Probabilidade, Processos Estocásticos e Equação Mestra

Nesse capítulo introduzimos alguns conceitos que serão utilizadas nos capítulos seguintes. Iniciamos um breve explanação sobre redes e grafos e discutimos algumas propriedades da teoria de probabilidade e estatística. Considerando como base o desenvolvimento feito por Tomé e Oliveira (2001) no livro *Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade*, obtemos a equação mestra que será utilizada na análise de campo médio do sistema irreversível estudado nesta dissertação (o modelo do voto da maioria).

2.1 Redes e Grafos

Uma definição grosseira sobre o que é uma rede pode ser dada da seguinte forma: rede é nada mais do que um conjunto de objetos conectados entre si de alguma maneira. Em representações das redes reais, esses objetos ou indivíduos estão na verdade fazendo alguma coisa, seja ela gerando energia, enviando dados, ou até mesmo tomando decisões. Podemos estar falando de pessoas em uma rede de amigos, rotas de servidores de internet, neurônios do cérebro. Em muitos casos o comportamento do sistema é afetado não só pela maneira qual esses indivíduos interagem, mas também pela forma que a rede está disposta ou montada.

Matematicamente, as redes tem sido estudadas e representadas como *grafos* desde 1736, quando Leonhard Euler estudou o problema das sete pontes na cidade da Prússia (NEWMAN, 1956) chamada de Königsberg (agora Kaliningrado, Rússia). O problema consistia em passear por essas sete pontes sem cruzar a mesma ponte duas vezes. Euler percebeu que essa trajetória poderia ser formulada como um grafo (WEST, 2000), após isso ele provou que esse tipo de travessia não poderia ser feito da maneira desejada, gerando assim o primeiro teorema na teoria dos grafos.

Desde Euler a teoria dos grafos cresceu substancialmente na matemática e em outras

ciências. Nas seções subseqüentes apresentamos as definições dos modelos utilizados e algumas de suas características.

2.1.1 Grafos Simples, Não-Direcionados e Finitos

Um dado grafo G pode ser definido por uma tripla que consiste em um conjunto de vértices $V(G)$, um conjunto de arestas $E(G)$ e a relação que associa cada aresta a dois vértices (não necessariamente distintos) que são pontos de conexões. A ordem (tamanho) de um grafo é dada pelo número de vértices $n(G)$ ou N . O grau de um vértice v (também chamada de conectividade) é o número de arestas que o conecta e pode ser escrito como $k(v)$ ou k_v (WEST, 2000). Um subgrafo de um grafo G é um grafo H tal que $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$ e as regras de atribuições dos pontos às arestas em H são as mesmas que em G .

Os grafos podem ser direcionados ou não-direcionados. Em particular os não-direcionados (que são usados neste trabalho) são aqueles nos quais as arestas não têm orientação, ou seja, não são ordenadas em pares mas em conjuntos do tipo $\{u, v\}$ de vértices. Esse conjunto pode ser escrito como $e = uv$ (ou $e = vu$) para a aresta e e os pontos de conexões u e v . As arestas E de um grafo não-direcionado G induzem uma relação binária em V chamada de adjacência em relação a G . Desta forma, os vértices u e v são adjacentes entre si e representados por $u \leftrightarrow v$.

Os grafos simples são grafos não-direcionados que não tem laços (arestas tais que os pontos iniciais e finais são os mesmos) e não mais que uma aresta entre 2 diferentes vértices. Em um grafo simples com N vértices, cada vértice tem grau menor que N (o contrário não é verdade, não existe um grafo não simples com N vértices no qual cada vértice tem grau menor que N).

Outra definição importante é a de grafo finito. Dado o grafo $G = (V, E)$ ele é denominado finito se V e E são conjuntos finitos. Tendo essas definições em mente podemos introduzir conceitos um pouco mais elaborados.

2.1.2 Grafos Regulares

Um grafo regular é um grafo sem laços e sem múltiplas arestas onde cada vértice tem o mesmo número de vizinhos, ou seja cada vértice tem o mesmo grau. Dado que o grau máximo é $\Delta(G)$ e o grau mínimo é $\delta(G)$, então G é grafo regular se $\Delta(G) = \delta(G)$. Dada a matriz de adjacência A , indexada pelo conjunto de vértices de V , onde $A_{uv} = 1$ se a aresta

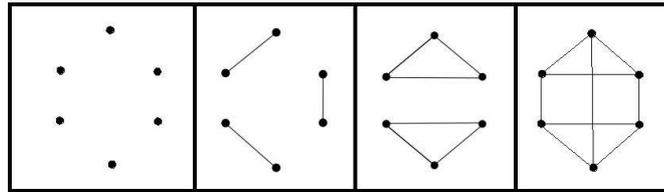


Figura 2.1: Exemplos de Grafos k -regulares, com 6 vértices e $k=0,1,2$ e 3

conecta os vértices v e u em G e $A_{uv} = 0$ caso contrário. O grafo regular com vértices de grau k é chamado de grafo k -regular, ou grafo de grau k , onde cada vértice tem precisamente k vizinhos. Um grafo 0-regular por exemplo, consiste de vértices desconectados, um grafo 1-regular consiste em arestas desconectadas. A Figura 2.1 mostra exemplos dos grafos 0-regular, 1-regular, 2-regular e 3-regular, respectivamente.

Para calcular o número de arestas de um grafo é utilizada a fórmula que também é chamada do “Handshaking Lemma”, dada por:

$$\sum_{v \in V(G)} k(v) = 2n(G). \quad (2.1)$$

A partir da Equação 2.1 é fácil verificar que um grafo k -regular com N vértices tem $Nk/2$ arestas, uma vez que cada vértice tem conectividade $k(v) = k$.

2.2 Grafos Aleatórios

Matematicamente, um grafo aleatório é um grafo que é gerado por algum processo aleatório. A teoria dos grafos aleatórios fica na interseção entre a teoria dos grafos e a teoria da probabilidade. Essa teoria foi introduzida por Paul Erdős e seu colaborador Alfred Rényi (ERDOS; RÉNYI, 1959), após Erdős ter descoberto que métodos probabilísticos eram freqüentemente úteis em soluções para problemas extremos na teoria dos grafos. Algumas dessas soluções não eram inteiramente novas na Matemática, no entanto foi certamente uma surpresa que idéias probabilísticas provaram-se tão importantes no estudo de uma simples estrutura como o grafo.

2.2.1 O Modelo de Erdős e Rényi

Um grafo aleatório pode ser imaginado como um ser vivo o qual evolui com o tempo. Ele nasce com um conjunto de N vértices e se desenvolve sucessivamente adquirindo arestas randomicamente (ALBERT; BARABÁSI, 2002). O objetivo principal é determinar

em que estágio da evolução uma propriedade do grafo tem probabilidade de surgir. Tornando mais preciso, consideremos as propriedades de um grafo “típico” em um espaço de probabilidade que consiste de grafos de um tipo particular. O espaço de probabilidade consiste em todos os grafos com um dado conjunto de N vértices marcados e E arestas, e a cada grafo é atribuída a mesma probabilidade. Dado G_M um elemento aleatório desse espaço de probabilidade, H , qualquer grafo com um dado conjunto de vértice e E arestas, então temos $\mathbb{P}(G_E = H) = 1/\binom{L}{E}$ onde $L = \binom{N}{2}$ (BOLLOBAS, 2001).

Na maioria dos casos temos uma seqüência de espaços de probabilidade. Para cada número natural n existirá um espaço de probabilidade constituído de grafos exatamente com N vértices. O interesse principal são as propriedades desse espaço para $N \rightarrow \infty$. Nessa situação pode-se dizer que o típico elemento do nosso espaço tem a propriedade Q quando a probabilidade de que o grafo aleatório com N vértices tem Q tendendo a 1 com $N \rightarrow \infty$. Uma vez dado tal espaço de probabilidade algumas perguntas surgem: Como esse grafo é conectado? Ele é do tipo k -conectado?

Uma analogia interessante para explicar esse fenômeno (WATTS, 2003) consiste inicialmente em jogar um número muito grande de botões de camisa no chão. Após isso escolha aleatoriamente um par de botões e ligue-os através de uma linha. Repita o último passo quantas vezes quiser. Finalmente, escolha um botão aleatoriamente dentre todos os que estão no chão. Ao levantá-lo há uma probabilidade de que outros botões venham agregados na mesma linha. Todos esses botões que vem agregados a mesma linha do botão escolhido fazem parte do *componente conectado*. Isso pode ser repetido até que todos os botões tenham sido removidos do chão. Qual será o maior número de botões conectados entre si? Como isso depende da quantidade de linhas que você amarrou?

Se você tiver cem botões e apenas uma linha então o maior componente conectado é de apenas dois botões. No entanto se você adicionou em cada botão linhas conectando todos os outros botões, seu maior componente será de cem botões. Esses são os dois casos extremos, mas um outro ponto interessante é conhecer e entender o que acontece entre o mínimo de conectividade (o primeiro caso) e o máximo de conectividade (o segundo caso).

2.2.2 Conectividade

A grande descoberta de Erdős e Rényi foi que muitas dessas importantes propriedades apareciam quase que de repente. O modelo $G\{N, \mathbb{P}(\text{aresta}) = p\}$ onde, $0 < p \leq 1$, consiste de todos os grafos com conjunto de vértices $V = \{1, 2, \dots, N\}$ nos quais as arestas são

escolhidas independentemente com probabilidade $\mathbb{P}(\text{aresta}) = p$. Ou seja, se G_0 é o grafo com conjunto de vértices V e com m arestas, então (BOLLOBAS, 2001),

$$\mathbb{P}(G_0) = \mathbb{P}(G = G_0) = p^m(1 - p)^{N-m}. \quad (2.2)$$

Se existem N vértices em um grafo e cada um é conectado em média com z vértices então $p = z/(N - 1)$, o que para N grande ($N \rightarrow \infty$) temos a aproximação $p = z/N$. O grau do vértice tem distribuição de probabilidade \mathbb{P}_k dada por (NEWMAN et al., 2001; PEREIRA; MOREIRA, 2005):

$$\mathbb{P}_k = \binom{N}{k} p^k (1 - p)^{N-k} \approx \frac{z^k e^{-z}}{k!}, \quad (2.3)$$

onde a segunda igualdade segue do limite para grandes N . Essa distribuição de probabilidade é conhecida como distribuição de Poisson.

2.2.3 O Componente Gigante

No exemplo dos botões (Seção 2.2.1) se colocarmos linhas aleatoriamente iremos quase sempre conectar um botão isolado a outro também isolado e, caso aconteça de escolher um já conectado, a probabilidade é que ele esteja conectado a um número pequeno de botões. Porém se adicionarmos linhas suficientes tal que cada botão tenha em média uma linha conectada a ele, a fração do grafo ocupada pelo maior componente conectado aumenta subitamente de quase zero para próximo de um. Essa transição entre a fase desconectada e a fase conectada tem normalmente um ponto crítico bem definido (ERDOS; RENYI, 1960; BOLLOBAS, 2001). Esse valor crítico ocorre quando $k = \langle k \rangle = 1$. O componente gigante (quando $\langle k \rangle > 1$) possui a maioria dos vértices do grafo, e os que não estão contidos formam pequenas estruturas desconexas entre si.

A Figura 2.2 nos mostra esse caso em particular onde vemos que a fração de sítios conectados a apenas um componente muda subitamente quando a conectividade média passa de um. Isso significa que, quando a transição de fase é guiada pela adição de um pequeno número de ligações bem perto do ponto crítico tem-se o efeito de conectar pequenos agrupamentos em apenas um componente gigante o qual passa a aglutinar todos os outros (com o aumento do $\langle k \rangle$) até que o restante dos vértices estejam conectados (ALBERT; BARABÁSI, 2002; KAUFFMAN, 1993). O tamanho desse grafo quando $N \rightarrow \infty$ pode ser calculado analiticamente (DALL; CHRISTENSEN, 2002). A fração de vértices na maior ilha é dada por

$$F(k) = 1 - \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} (ke^{-k})^n, \quad (2.4)$$

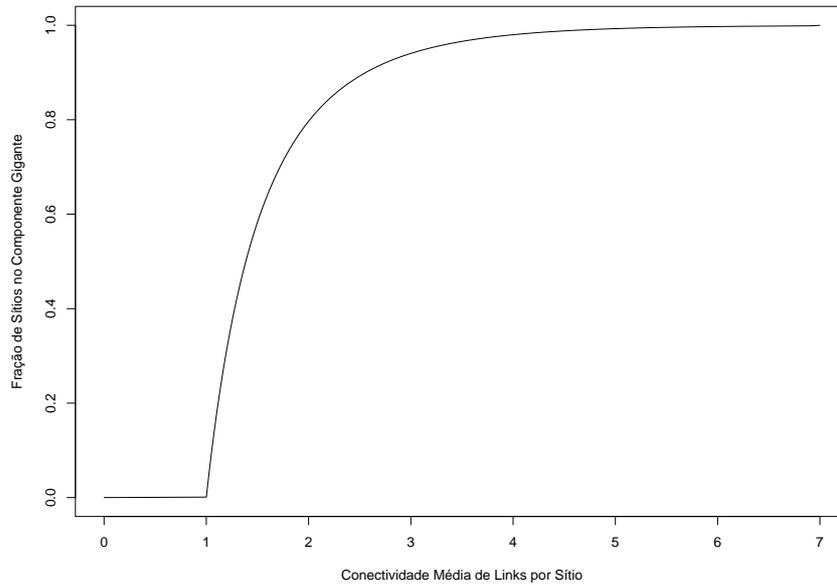


Figura 2.2: Fração de sítios no componente gigante em função da conectividade de um grafo aleatório.

fazendo (BOLLOBAS, 2001):

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} (x)^n \Leftrightarrow x = ye^{-y}, \quad (2.5)$$

podemos inverter a equação 2.4 finalmente obtendo

$$k(F) = 1 - \frac{1}{F} \ln(1 - F), \quad (2.6)$$

da qual podemos ver, por exemplo, que quando $F \rightarrow 0$ temos $k = 1$.

2.3 Probabilidade e Variáveis Aleatórias

Tal como acontece com a teoria da mecânica, que atribui definições precisas aos termos de uso diário, como trabalho e força, a teoria das probabilidades (probabilidade deriva do Latim *probare* que significa provar ou testar) tenta quantificar a noção do provável.

Em torno de 1930, A.N. Kolmogorov apresentou um conjunto de axiomas matemáticos para definir probabilidade (MAGALHAES, 2006). Uma função \mathbb{P} , definida na σ -álgebra F de subconjuntos de Ω e com valores entre $[0, 1]$, é uma probabilidade se satisfaz os seguintes *Axiomas de Kolmogorov*:

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

2. Para todo subconjunto $A \in F$, $\mathbb{P}(A) \geq 0$;
3. Para toda seqüência $A_1, A_2, \dots \in F$, mutuamente exclusivos, temos $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$.

A trinca (Ω, F, \mathbb{P}) é denominada espaço de probabilidade. Os subconjuntos que estão em F são denominados eventos e é somente a eles que se atribui a probabilidade. Finalmente Ω representa o espaço amostral, que é definido pelo conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Na realização de um fenômeno aleatório, é comum ter-se interesse em uma ou mais grandezas. Essas grandezas são funções das ocorrências do fenômeno. Dado um fenômeno aleatório qualquer, em um certo espaço de probabilidade, desejamos estudar a estrutura probabilística de grandezas associadas a esse fenômeno.

Seja (Ω, F, \mathbb{P}) um espaço de probabilidade. Denominamos de variável aleatória, qualquer função $X(I)$ tal que

$$X^{-1}(I) = \{w \in \Omega : X(w) \in I\} \in F, \quad (2.7)$$

para todo intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Uma variável aleatória é, portanto, uma função do espaço amostral Ω nos reais, para a qual é possível calcular a probabilidade de ocorrência de seus valores. Temos para cada elemento $w \in \Omega$, um número real $X(w)$.

Considerando o exemplo bastante conhecido do lançamento de uma moeda não viciada, temos que $\Omega = \{cara, coroa\}$, F o conjunto das partes de Ω e \mathbb{P} dada por $\mathbb{P}(cara) = \mathbb{P}(coroa) = 1/2$. Definindo uma função X de Ω em \mathbb{R} da seguinte forma:

$$X(w) = \begin{cases} 1, & \text{se } w = cara \\ 0, & \text{se } w = coroa. \end{cases} \quad (2.8)$$

Portanto, X é uma variável aleatória para qualquer conjunto $I \subset \mathbb{R}$, $X^{-1}(I) \in F$. Por exemplo, se $I = (-\infty, 0)$ temos $X^{-1} = \emptyset$; no entanto para $I = (0, 2]$ temos $X^{-1}(I) = \{cara\}$. Em ambos os casos a inversa pertence a F .

As variáveis aleatórias podem ser discretas ou contínuas. Uma variável aleatória é discreta se a sua distribuição de probabilidade é discreta; uma distribuição de probabilidade discreta é tal que é completamente caracterizada pela sua função de distribuição de probabilidade. Dado I uma variável aleatória discreta que assume valores inteiros associados a um número real não negativo, tal que $\mathbb{P}_I \geq 0$, temos então sua distribuição de probabilidade

dada por:

$$\sum_l \mathbb{P}_l = 1. \quad (2.9)$$

No caso de uma variável contínua x , esta pode assumir qualquer valor sobre a reta real. Nesse caso uma probabilidade é associada a cada intervalo da reta. A probabilidade que a variável aleatória x esteja no intervalo $[a, b]$ é dada por

$$\int_b^a \rho(x) dx, \quad (2.10)$$

onde a densidade de probabilidade $\rho(x)$, satisfaz as propriedades:

$$\rho(x) \geq 0 \quad (2.11)$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = 1. \quad (2.12)$$

2.4 Distribuição Normal

A distribuição normal, conhecida também como distribuição de Gauss ou gaussiana, é uma das mais importantes distribuições de probabilidade. Foi desenvolvida pelo matemático francês Abraham de Moivre. Uma variável x segue o modelo Normal se sua densidade de probabilidade for dada por:

$$\rho(x) = \frac{1}{o\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2o^2}}, \quad (2.13)$$

com $\mu, o \in \mathbb{R}$, $o > 0$. Os parâmetros μ e o^2 são, respectivamente a média e a variância da variável. A Figura 2.3 mostra a função densidade de probabilidade para quatro diferentes conjuntos de parâmetros.

O modelo normal é um dos principais modelos para variáveis aleatórias contínuas, sendo caracterizado pela sua função densidade de probabilidade, que segue os axiomas de Kolmogorov (MAGALHAES, 2006). De acordo com a Equação 2.12 temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{o\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2o^2}} dx = 1. \quad (2.14)$$

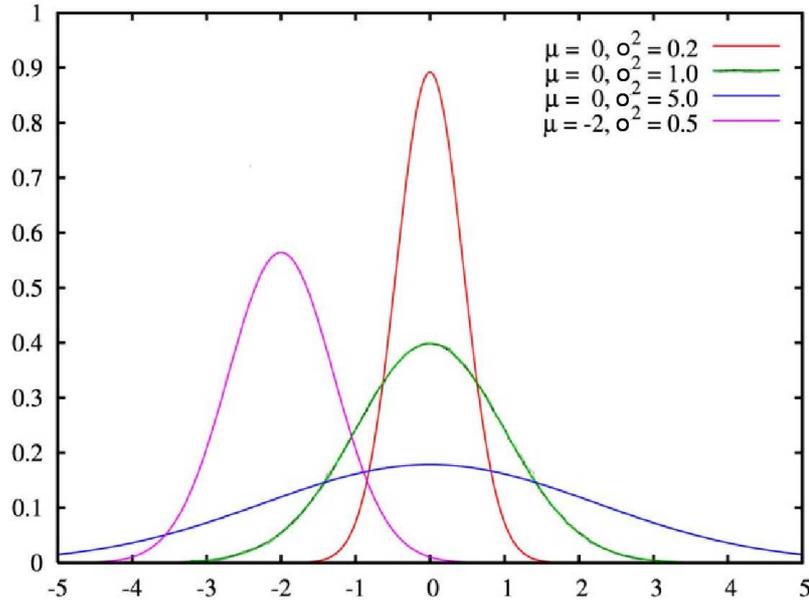


Figura 2.3: Densidade de probabilidade da distribuição normal para quatro diferentes valores de μ e σ .

2.5 Distribuições de Probabilidade Mistas

Muitos modelos estatísticos consideram distribuições de probabilidade mistas que são particularmente úteis para modelar dados de grupos heterogêneos. A primeira aplicação em um problema estatístico foi feita por Feller (1943) e consiste em considerar uma população composta de K subgrupos, misturados aleatoriamente na proporção dos seus tamanhos relativos η_1, \dots, η_K .

Suponha que o interesse está em alguma característica aleatória Y , que é heterogênea entre os subgrupos e homogênea dentro dos subgrupos (SCHNATTER, 2006). A distribuição de probabilidade de uma variável aleatória Y é caracterizada por sua função densidade de probabilidade (MAGALHAES, 2006). Seja a função de densidade de probabilidade $\mathbb{P}(y)$ na forma de uma distribuição mista dada por

$$\mathbb{P}(y) = \eta_1 p_1(y) + \dots + \eta_K p_K(y), \quad (2.15)$$

onde $y \in \Omega$, $p_j(y)$ é a função distribuição de densidade de probabilidade associada ao j -ésimo subgrupo, e η_j é o peso desta componente. Temos que

$$\eta_j \geq 0, \quad \eta_1 + \dots + \eta_K = 1. \quad (2.16)$$

Nessa dissertação usaremos uma função de distribuição de probabilidade mista, para o caso de um sistema composto de dois subgrupos ($K = 2$) e os pesos dos componentes

dados por $\eta_1 = b$ e conseqüentemente $\eta_2 = (1 - b)$ (ver equação 3.4).

2.6 Processos Estocásticos

Uma função aleatória de uma variável estocástica é definida quando uma dada variável aleatória depende de um parâmetro t , onde esse t significa tempo. Aqui consideraremos processos estocásticos nos quais o tempo e a variável estocástica sejam passíveis de discretização. Suponha que a variável estocástica x_t e t assumam valores inteiros. Um processo estocástico fica completamente definido até o instante L pela distribuição de probabilidade conjunta

$$\mathbb{P}_L(n_0, \dots, n_L), \quad (2.17)$$

de que x_t tome o valor n_0 no instante $t = 0$ e assim sucessivamente até o valor n_L no instante $t = L$.

Um processo estocástico é considerado um processo markoviano (chamado assim em homenagem ao matemático Andrei Andreyevich Markov) quando a probabilidade condicional $\mathbb{P}_{L+1}(n_{L+1}|n_0, \dots, n_L)$ satisfaz a relação (GARDINER, 1985):

$$\mathbb{P}_{L+1}(n_{L+1}|n_0, \dots, n_L) = \mathbb{P}_{L+1}(n_{L+1}|n_L), \quad (2.18)$$

isto é, a probabilidade que a variável estocástica x_t assuma o valor n_{L+1} no instante $t = L + 1$, dado que ela tenha assumido o valor n_L no instante $t = L$, é independente dos valores de n_0, \dots, n_{L-1} . Portanto a memória markoviana (outra maneira de chamar o processo markoviano), implica em que a evolução do estado atual só depende do estado anterior.

Usando a definição de probabilidade condicional temos:

$$\mathbb{P}_L(n_0, \dots, n_L) = \mathbb{P}_L(n_L|n_{L-1}) \dots \mathbb{P}_2(n_2|n_1) \mathbb{P}_1(n_1|n_0) \mathbb{P}_0(n_0). \quad (2.19)$$

Assim definimos completamente o processo markoviano pelas probabilidades condicionais da Equação 2.18 e pela probabilidade inicial $\mathbb{P}_0(n_0)$.

A probabilidade $\mathbb{P}_L(n_L)$ que a variável x_t assuma o valor n_L no instante $t = L$, independente dos valores que ela tenha assumido nos instantes anteriores, é então dada por:

$$\mathbb{P}_L(n_L) = \sum \mathbb{P}_L(n_0, \dots, n_L), \quad (2.20)$$

onde a soma estende-se sobre todos os valores possíveis de n_0, \dots, n_{L-1} . Usando a Equa-

ção 2.19 temos a seguinte equação de recorrência:

$$\mathbb{P}_L(n_L) = \sum_{n_{L-1}} \mathbb{P}_L(n_L|n_{L-1})\mathbb{P}_{L-1}(n_{L-1}). \quad (2.21)$$

Portanto, dado $\mathbb{P}_0(n_0)$, podemos obter $\mathbb{P}_L(n_L)$ em qualquer instante.

A probabilidade condicional $\mathbb{P}_{L+1}(n_{L+1}|n_L)$ é interpretada fisicamente como a probabilidade de transição do estado n_L para o estado n_{L+1} . Como estamos considerando aqui somente processos markovianos então essas probabilidades de transição não variam com o tempo. Assim sendo podemos escrever

$$\mathbb{P}_{L+1}(n_{L+1}|n_L) = T(n_{L+1}, n_L), \quad (2.22)$$

de modo que a Equação 2.21 se torna

$$\mathbb{P}_L(n_L) = \sum_{n_{L-1}} T(n_L, n_{L-1})\mathbb{P}_{L-1}(n_{L-1}). \quad (2.23)$$

2.7 Matriz Estocástica

Uma vez que o processo estocástico markoviano fica completamente definido pelas probabilidades de transição e inicial, podemos reescrever a Equação 2.23 como:

$$\mathbb{P}_L(n) = \sum_m T(n, m)\mathbb{P}_{L-1}(m), \quad (2.24)$$

onde $T(n, m)$ é um elemento da matriz estocástica T que corresponde a probabilidade de transição do estado m para o estado n . Temos ainda que $T(n, m) \geq 0$, pois $T(n, m)$ é uma probabilidade condicional, e a condição de normalização

$$\sum_n T(n, m) = 1, \quad (2.25)$$

ou seja, os elementos da matriz T devem ser não negativos e a soma dos elementos de uma coluna qualquer igual à unidade.

Definindo a matriz \mathbb{P}_L como a matriz coluna cujos elementos são $\mathbb{P}_L(n)$, então a Equação 2.24 pode ser escrita na forma matricial

$$\mathbb{P}_L = T\mathbb{P}_{L-1}. \quad (2.26)$$

Dessa forma, conhecendo-se a matriz coluna inicial \mathbb{P}_0 num dado instante podemos obter

\mathbb{P}_L através de

$$\mathbb{P}_L = T^L \mathbb{P}_0, \quad (2.27)$$

reduzindo assim o problema de determinar $\mathbb{P}_L(n)$ ao cálculo da L -ésima potência da matriz estocástica T . Finalmente pode-se escrever essa equação como

$$\mathbb{P}_L(n) = \sum_m T^L(n, m) \mathbb{P}_0(m), \quad (2.28)$$

onde o elemento de matriz $T^L(n, m)$ é a probabilidade de transição do estado m para o estado n , em L passos, ou seja, é a probabilidade da variável estocástica x_t tomar o valor n num certo instante t dado que ela tenha tomado o valor m num instante anterior $t - L$.

2.8 A Equação Mestra

Dada a matriz estocástica T com elementos $T(n, m)$. Suponha que as transições ocorram a cada intervalo de tempo τ suficientemente pequeno de modo que a probabilidade de permanência no mesmo estado seja muito próxima da unidade, então temos:

$$T(n, m) = \tau W(n, m), \quad n \neq m, \quad (2.29)$$

e

$$T(n, n) = 1 - \tau \Omega(n). \quad (2.30)$$

Os elementos de matriz $T(m, n)$ representam a probabilidade de transição do estado n para o estado m onde temos

$$\sum_m T(m, n) = 1 \quad (2.31)$$

e o somatório é sobre todos os valores possíveis de m . Substituindo as Equações 2.29 e 2.30 na expressão acima temos,

$$\Omega(n) = \sum_{m(\neq n)} W(m, n). \quad (2.32)$$

A probabilidade $\mathbb{P}_{L+1}(n)$ do sistema estar no estado n no $(L + 1)$ -ésimo intervalo de tempo pode ser escrita na forma

$$\mathbb{P}_{L+1}(n) = \sum_{m(\neq n)} T(n, m) \mathbb{P}_L(m) + T(n, n) \mathbb{P}_L(n). \quad (2.33)$$

De forma análoga, a probabilidade do sistema estar no estado n no instante de tempo $t + \tau$ é dada pela probabilidade dele ir de um estado m para o estado n mais a probabilidade

dele estar no estado n e permanecer no mesmo, então

$$\mathbb{P}(n, t + \tau) = \sum_{m(\neq n)} T(n, m)\mathbb{P}(m, t) + T(n, n)\mathbb{P}(n, t). \quad (2.34)$$

Usando novamente as Equações 2.29 e 2.30 temos

$$\mathbb{P}(n, t + \tau) = \tau \sum_{m(\neq n)} W(n, m)\mathbb{P}(m, t) + \mathbb{P}(n, t) - \tau\Omega(n)\mathbb{P}(n, t). \quad (2.35)$$

e conseqüentemente

$$\frac{\mathbb{P}(n, t + \tau) - \mathbb{P}(n, t)}{\tau} = \sum_{m(\neq n)} W(n, m)\mathbb{P}(m, t) - \Omega(n)\mathbb{P}(n, t). \quad (2.36)$$

No limite $\tau \rightarrow 0$, o lado esquerdo da equação se torna a derivada temporal de $\mathbb{P}(n, t)$ ficando

$$\frac{d}{dt}\mathbb{P}(n, t) = \sum_{m(\neq n)} W(n, m)\mathbb{P}(m, t) - \Omega(n)\mathbb{P}(n, t), \quad (2.37)$$

assim usando a Equação 2.32, obtemos a seguinte equação mestra:

$$\frac{d}{dt}\mathbb{P}(n, t) = \sum_{m(\neq n)} \{W(n, m)\mathbb{P}(m, t) - W(m, n)\mathbb{P}(n, t)\}, \quad (2.38)$$

onde $W(n, m)$ (ver equação 2.30) é interpretado como a probabilidade (ou taxa) de transição de m para n por unidade de tempo.

Considerando agora um sistema com dinâmica estocástica, governado por uma equação mestra, que consiste de N partículas (sítios) de modo que cada partícula pode assumir apenas 2 estados (por exemplo ± 1). Desta forma o número total de configurações ou estados do sistema será 2^N . Denotando por σ_i a variável associada ao sítio i , então um possível estado de todo o sistema pode ser representado pelo vetor $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{N-1}, \sigma_N)$ cuja i -ésima componente é o estado σ_i do sítio i .

Dada a probabilidade $\mathbb{P}(\sigma, t)$ de ocorrência da configuração (estado) σ no instante t , e $W(\sigma, \sigma')$ a taxa de transição de σ' para σ , temos a evolução temporal governada pela seguinte equação mestra

$$\frac{d}{dt}\mathbb{P}(\sigma, t) = \sum_{\sigma'(\neq \sigma)} \{W(\sigma, \sigma')\mathbb{P}(\sigma', t) - W(\sigma', \sigma)\mathbb{P}(\sigma, t)\}. \quad (2.39)$$

onde a matriz de evolução W tem dimensão $2^N \times 2^N$, e os seus elementos fora da diagonal

são dados por $W(\sigma, \sigma')$ e os seus elementos diagonais $W(\sigma, \sigma)$. Usando a relação

$$W(\sigma, \sigma) = - \sum_{\sigma' (\neq \sigma)} W(\sigma, \sigma'), \quad (2.40)$$

podemos reescrever a equação mestra na forma

$$\frac{d}{dt} \mathbb{P}(\sigma, t) = \sum_{\sigma'} W(\sigma, \sigma') \mathbb{P}(\sigma', t), \quad (2.41)$$

onde, agora, a soma em σ' é irrestrita.

Para o caso em que as transições se dão entre estados que diferem entre si apenas pelo estado de um único sítio, temos

$$W(\sigma', \sigma) = - \sum_i \delta(\sigma'_1, \sigma_1) \delta(\sigma'_2, \sigma_2) \dots \delta(\sigma'_i, -\sigma_i) \dots \delta(\sigma'_N, \sigma_N) w_i(\sigma), \quad (2.42)$$

onde $\delta(i, j) = 1$ se $i = j$ e zero caso contrário, é a função delta de Kronecker. O termo $w_i(\sigma)$ é a taxa de inversão do estado do i -ésimo sítio de σ_i para $-\sigma_i$. Assim a equação mestra será

$$\frac{d}{dt} \mathbb{P}(\sigma, t) = \sum_{i=1}^N \{w_i(\sigma^i) \mathbb{P}(\sigma^i, t) - w_i(\sigma) \mathbb{P}(\sigma, t)\}, \quad (2.43)$$

onde o estado σ^i é obtido do estado σ trocando o estado do i -ésimo sítio, σ_i por $-\sigma_i$.

2.9 Valores Médios

Considere a média $\langle f(\sigma) \rangle$ de uma função de estado $f(\sigma)$, definida como

$$\langle f(\sigma) \rangle = \sum_{\sigma} f(\sigma) \mathbb{P}(\sigma, t). \quad (2.44)$$

Multiplicando ambos os membros da equação mestra 2.43 por $f(\sigma)$ e somando em todos os estados do sistema σ , temos para a evolução temporal de $\langle f(\sigma) \rangle$

$$\frac{d}{dt} \langle f(\sigma) \rangle = \sum_{\sigma} \langle \{f(\sigma^i) - f(\sigma)\} w_i(\sigma) \rangle. \quad (2.45)$$

Em particular, para a evolução temporal da média $\langle \sigma_j \rangle$ obtemos

$$\frac{d}{dt} \langle \sigma_j \rangle = -2 \langle \sigma_j w_j(\sigma) \rangle. \quad (2.46)$$

Essa equação será utilizada na aproximação de campo médio apresentada no próximo capítulo.

3 O Modelo do Voto da Maioria

3.1 Introdução

A partir do conceito de que muitas leis da natureza são de origem estatística, a Física Estatística adquiriu o estatuto de uma disciplina importante. Dado o seu sucesso e seu quadro conceitual muito geral, nos últimos anos tem havido uma tendência de diversas aplicações em campos interdisciplinares como Biologia, Medicina, tecnologia da informação, Informática, etc (CASTELLANO et al., 2009; ALBERT; BARABÁSI, 2002; BELLOMO, 2007; GALAM, 1986).

Uma dificuldade conceitual surge imediatamente quando se tenta uma abordagem de dinâmica social a partir do ponto de vista da Física Estatística. Em aplicações normais, os componentes elementares dos sistemas estudados, como átomos e moléculas, são objetos relativamente simples, cujos comportamentos são bem conhecidos: os fenômenos macroscópicos não são devido a um comportamento complexo de entidades individuais, em vez disso os efeitos coletivos são resultantes da interação de um grande número de elementos 'simples'.

Os seres humanos são exatamente o oposto dessas entidades simples, uma vez que o comportamento detalhado de cada um deles já é o resultado complexo de muitos processos fisiológicos e psicológicos, ainda largamente desconhecidos. Não se sabe exatamente a dinâmica de um único indivíduo, nem a forma como ele interage com os outros. Além disso, mesmo se soubessemos, a própria natureza da dinâmica de tais interações seriam muito mais complicadas do que, digamos, as forças que os átomos exercem uns sobre os outros.

Mas, a despeito disso, a física estatística traz um importante valor a ser acrescentado. Na maioria das situações qualitativas (e mesmo algumas quantitativas) as propriedades dos fenômenos de grande escala não dependem dos detalhes microscópicos do processo. Somente características de nível superior, como simetrias, dimensionalidade, ou leis de conservação, são relevantes para o comportamento global. Segundo Dorlas (DORLAS,

1999),

"... Um modelo de um sistema físico é uma caricatura do sistema obtida para extrair somente as características essenciais de um fenômeno a ser estudado, então ele se torna manuseável para uma análise matemática...".

Os sistemas magnéticos são exemplos de sistemas utilizados para modelar redes sociais. Ao longo dos anos, têm sido estudados diversos modelos como por exemplo o modelo de Ising (GALAM et al., 1982), o modelo de Heisenberg, o modelo de Potts (WU, 1982), o modelo do votante (CLIFFORD; SUDBURY, 1973) e, sua variação, o modelo do votante majoritário (TOME et al., 1991; OLIVEIRA, 1992; GALAM, 1986).

Estes modelos estatísticos podem ser divididos em duas categorias distintas: os microscopicamente reversíveis e os microscopicamente irreversíveis. Nos modelos reversíveis a dinâmica é controlada por um hamiltoniano que modela a interação entre os constituintes do sistema, ou seja, a transição entre dois estados depende da energia envolvida neste processo e da energia que o sistema possui. Ao contrário, os modelos irreversíveis não admitem uma descrição em termos de um hamiltoniano e a evolução dinâmica é determinada por uma probabilidade de transição entre os possíveis estados do sistema.

3.2 O Modelo

Opiniões, aspectos culturais e lingüísticos são traços que podem ser modelados em termos de um pequeno conjunto de variáveis cuja dinâmica é determinada pela estrutura das interações sociais. A interpretação de tais variáveis são diferentes nos vários casos: uma variável binária pode indicar sim ou não a uma resposta de uma pergunta na dinâmica de opinião, dois sinônimos para um determinado objeto na evolução da linguagem ou o prevalecimento de uma língua na competição entre dois idiomas.

Imagine agora uma comunidade de indivíduos em que cada um possui uma certa característica, por exemplo uma opinião sobre um determinado assunto e essa opinião expressa em forma binária (sendo favorável ou contrário a um tema de debate por exemplo) tal que o indivíduo σ_i possa assumir valores ± 1 . Com o passar do tempo, os indivíduos vão mudando de opinião de acordo com o que pensam a maioria dos vizinhos mais próximos. Um dado indivíduo vai opinar a favor se a maioria da sua vizinhança for a favor e vice-versa. No entanto alguns indivíduos têm uma certa resistência à opinião alheia e podem agir de forma inversa (contra, quando a maioria for a favor). Essa "resistência" é

representada por um parâmetro positivo q , comumente denominado parâmetro de ruído e corresponde à probabilidade do indivíduo adotar a opinião contrária à da maioria de seus vizinhos.

Essa representação, denominada *modelo do voto da maioria com ruído* ou *modelo do votante majoritário com ruído*, é um dos modelos estocásticos irreversíveis, definidos em reticulados, mais simples e que apresentam um ponto crítico para um valor de ruído $q = q_c$. A dinâmica desse modelo é governada pela equação mestra 2.43 e sua taxa de inversão do valor do sítio (ou indivíduo) é dada por

$$w_i(\sigma) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - (1 - 2q) \sigma_i S \left(\sum_{\delta=1}^{k_i} \sigma_\delta \right) \right\}, \quad (3.1)$$

onde

$$S(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ 1, & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

e a soma se estende sobre os k_i primeiros vizinhos do sítio i .

A Equação 3.1 corresponde ao modelo anteriormente usado do voto da maioria (TOME et al., 1991; OLIVEIRA, 1992; PEREIRA; MOREIRA, 2005; CAMPOS et al., 2003). Nesse modelo todos os agentes tem a mesma probabilidade de resistência q .

A fim de tornar o modelo mais realista no contexto social, na variação proposta nesta dissertação associamos a cada agente o seu ruído q_i característico. Dessa forma o agente não tem somente opinião, mas também uma resistência intrínseca à opinião de sua vizinhança. A nova taxa de inversão do valor do sítio é então dada por

$$w_i(\sigma) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - (1 - 2q_i) \sigma_i S \left(\sum_{\delta=1}^{k_i} \sigma_\delta \right) \right\}, \quad (3.3)$$

onde o parâmetro de ruído q_i , associado ao sítio i , satisfaz uma distribuição mista de probabilidade dada por

$$\mathbb{P}(q_i) = b\delta(q_i) + (1 - b)\delta(q_i - q). \quad (3.4)$$

O parâmetro b corresponde à fração de sítios que não possuem um ruído característico, constituindo juntamente com o ruído q os parâmetros relevantes do nosso modelo. A forma da distribuição $\mathbb{P}(q)$ dos valores de q associados ao ruído de um dado sítio, é em princípio qualquer. Por exemplo, podemos ter $\mathbb{P}(q) = q^* = \text{constante}$ ou uma gaussiana como a utilizada nessa dissertação (Equação 4.1). É importante notar que a taxa de transição (Equação 3.3) é invariante sob a inversão das variáveis de spin de todos os sítios da

rede, isto é, a transformação $\sigma_i \rightarrow -\sigma_i$. De fato, o modelo possui simetria de inversão: se alteramos o estado de todos os sítios da rede temos um estado completamente equivalente ao anterior.

Os possíveis estados estacionários do sistema são:

1. Para $q = 0$, todos os sítios estarão no mesmo estado (+1 ou -1). No jargão de sistemas sociais ocorre a unanimidade.
2. Para $0 < q < q_c(b)$, o sistema estará na fase ordenada, ou seja haverá predominância de spins em um dos estados (por exemplo a maioria com o valor +1 e o restante no estado contrário). Na linguagem de sistemas sociais, dizemos que ocorre a formação de consenso nesta região.
3. Para $q \geq q_c(b)$, o sistema estará na fase desordenada com metade dos sítios em um estado e a outra metade no estado contrário ($\langle \sigma_i \rangle = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(\sigma_i = +1) = \mathbb{P}(\sigma_i = -1) = 1/2$). Neste caso não há consenso.

É conhecido que certos materiais magnéticos como o ferro possuem uma magnetização permanente que desaparece quando o material é aquecido a temperaturas maiores que a temperatura de Curie (T_c), isto é, em temperaturas baixas o sistema está numa fase termodinâmica ordenada, em altas temperaturas numa fase desordenada e a temperatura onde ocorre essa transição é chamada temperatura de Curie ou crítica. Caso um sistema sofra essa transição de fase, então o princípio da universalidade do comportamento crítico nos diz que o comportamento ao redor do ponto crítico deve ser idêntico ao de outros sistemas com a mesma simetria (o modelo Glauber-Ising possui essa simetria). Portanto, sistemas com simetria de inversão (as taxas de inversão são invariantes pela transformação $\sigma_i \rightarrow -\sigma_i$ aplicadas a todos os sítios da rede), irreversíveis ou não, pertencem a classe de universalidade do modelo Glauber-Ising (GLAUBER, 1963).

O modelo do voto da maioria é um análogo irreversível do modelo de Ising ferromagnético na ausência de campo magnético externo, com o parâmetro de ruído q fazendo o papel da temperatura de equilíbrio do sistema T .

Para analisar o comportamento do sistema como um todo se faz necessário o cálculo de algumas quantidades que dependem do estado do sistema e, portanto, dos parâmetros q e b . A primeira quantidade de interesse é o parâmetro de ordem do sistema. A

magnetização do modelo do voto da maioria é definida como

$$M = \langle m \rangle = \left\langle \frac{1}{N} \left| \sum_{i=1}^N \sigma_i \right| \right\rangle, \quad (3.5)$$

onde $\langle \dots \rangle$ é a média em um ensemble de estados do sistema. Como o modelo possui simetria de inversão, e os estados com magnetizações de sinais contrários ocorrem com a mesma probabilidade, consideramos apenas o módulo do somatório dos spins.

Outra grandeza de interesse é a susceptibilidade, definida como a variância do parâmetro de ordem do sistema:

$$\chi = N \{ \langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2 \}. \quad (3.6)$$

Por fim, calculamos também o cumulante de quarta ordem de Binder (BINDER, 1981) que corresponde a medida de afastamento da distribuição normal, definido como

$$U = 1 - \frac{\langle m^4 \rangle}{3 \langle m^2 \rangle^2}. \quad (3.7)$$

A mudança no valor do parâmetro de ordem do sistema caracteriza uma transição de fase do tipo ordem-desordem. Então, devido ao aumento do valor do parâmetro de ruído, o sistema evolui do estado ferromagnético (ordenado) para o estado paramagnético (desordenado). Na fase ordenada a magnetização possui um valor não nulo, enquanto que na fase desordenada a magnetização é nula.

3.3 Expoentes Críticos e Efeitos de Tamanho Finito

Os expoentes críticos descrevem o comportamento de quantidades físicas perto do ponto crítico (STANLEY, 1971; DORLAS, 1999; TOMÉ; OLIVEIRA, 2001). Eles são considerados interessantes pois dependem de poucos parâmetros fundamentais e são menos sensíveis aos detalhes das interações em nível microscópico (YEOMANS, 1992). Devido a esse fato, sistemas aparentemente muito diferentes possuem os mesmos expoentes críticos e a partir daí uma classe de universalidade pode ser definida, de forma que, sistemas que apresentam os mesmos expoentes críticos pertencem a uma mesma classe.

Para o modelo do voto da maioria iniciaremos definindo, de forma adimensional, a medida da distância ao ponto crítico

$$\varepsilon \equiv q - q_c. \quad (3.8)$$

O expoente crítico associado a uma função termodinâmica $f(\varepsilon)$, assumindo que o limite

existe, é

$$\lambda \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln |f(\varepsilon)|}{\ln |\varepsilon|}, \quad (3.9)$$

Quando o sistema se encontra suficientemente próximo do ponto crítico ($|\varepsilon| \rightarrow 0$) podemos expressar $f(\varepsilon)$ como

$$f(\varepsilon) \approx |\varepsilon|^\lambda. \quad (3.10)$$

Portanto, o comportamento da magnetização e da susceptibilidade próximas ao ponto crítico são dadas, respectivamente, por

$$M \approx |\varepsilon|^\beta \quad (3.11)$$

e

$$\chi \approx |\varepsilon|^{-\gamma}. \quad (3.12)$$

O comprimento da correlação do sistema, que diverge na transição de fase, é dado por

$$\xi \approx |\varepsilon|^{-\nu}. \quad (3.13)$$

Em conseqüência da divergência do comprimento de correlação estar limitada pelo tamanho finito do sistema, as funções termodinâmicas apresentam uma dependência com o tamanho do sistema. Portanto, na região crítica assumimos:

$$\xi \approx N^{1/D} \approx |\varepsilon|^{-\nu}, \quad (3.14)$$

então podemos escrever

$$|\varepsilon| \approx N^{-1/\nu'}, \quad (3.15)$$

onde $\nu' = D\nu$ e D é a dimensão efetiva¹.

Explicitando a dependência de $|\varepsilon|$ em N nas Equações 3.11 e 3.12 temos

$$M_N \approx |N|^{-\beta/\nu'}, \quad (3.16)$$

$$\chi_N \approx |N|^{\gamma/\nu'}. \quad (3.17)$$

Podemos com essas duas equações, após determinado o valor da magnetização e da susceptibilidade no ponto crítico para sistemas de diferentes tamanhos, estimar os expoentes β/ν' e γ/ν' .

O cumulante de Binder (BINDER, 1981), definido de forma que o expoente crítico as-

¹Para redes regulares temos $\xi \approx L \approx |\varepsilon|^{-\nu}$ e $N = L^D$ (onde D é a dimensão euclídeana na qual a rede regular de lado L está inserida).

sociado é nulo ($U \approx N^0$), tem o valor no ponto crítico que é independente do tamanho do sistema:

$$U_N(q = q_c) = U(q = q_c) = U^*. \quad (3.18)$$

Assim, para se obter o parâmetro crítico no limite termodinâmico ($N \rightarrow \infty$) o valor de q_c é o valor de q onde as curvas U_N se encontram.

De forma mais rigorosa, pode ser mostrado que no limite $\varepsilon \rightarrow 0$

$$M_N(q) = N^{-\beta/v'} \tilde{M}(y), \quad (3.19)$$

$$\chi_N(q) = N^{\gamma/v'} \tilde{\chi}(y), \quad (3.20)$$

$$U_N(q) = \tilde{U}(y), \quad (3.21)$$

onde $y = N^{1/v'} \varepsilon$ é denominada variável de escala e $\tilde{M}(y)$, $\tilde{\chi}(y)$ e $\tilde{U}(y)$ são funções universais de escala, pois toda a dependência com o tamanho do sistema (N) ocorre apenas através da variável y nestas funções.

A partir das três equações acima podemos gerar a relação de hiper-escala dada por

$$2 \frac{\beta}{v'} + \frac{\gamma}{v'} = D, \quad (3.22)$$

onde D é a dimensão efetiva do sistema. Para redes regulares, o fator D é igual a própria dimensão do espaço onde o sistema está inserido.

Para estimarmos β/v' e γ/v' vamos considerar as funções auxiliares Λ e Γ que relacionam, respectivamente, a magnetização e a susceptibilidade para dois tamanhos de rede diferentes N_1 e N_2 (MELO, 2010). Inicialmente temos

$$\Lambda_{N_1, N_2} = -a^{-1} \ln \left(\frac{M_{N_2}}{M_{N_1}} \right), \quad (3.23)$$

onde $a = \ln(N_2/N_1)$ é o fator de escala. Suficientemente perto do ponto crítico podemos fazer uma substituição usando a Equação 3.19, então

$$\Lambda_{N_1, N_2} = \frac{\beta}{v'} - a^{-1} \ln \left(\frac{\tilde{M}(y_1)}{\tilde{M}(y_2)} \right), \quad (3.24)$$

onde $y_i = N_i^{1/v'} \varepsilon$. No ponto crítico temos $y_1 = y_2 = 0$, conseqüentemente $\Lambda_{N_1, N_2} = \beta/v'$. Desta forma podemos construir um gráfico de Λ em função do q , usando diferentes valores para N_1 e N_2 . O cruzamento das curvas ocorre em $q = q_c$, e nesse ponto temos uma estimativa para o expoente β/v' .

Para estimar o expoente γ/v' iremos seguir o mesmo procedimento anterior, mas com

a função Γ que é definida por

$$\Gamma_{N_1, N_2} = a^{-1} \ln \left(\frac{\chi_{N_2}}{\chi_{N_1}} \right), \quad (3.25)$$

utilizando Equação 3.20 temos

$$\Gamma_{N_1, N_2} = \frac{\gamma}{v'} - a^{-1} \ln \left(\frac{\tilde{\chi}(y_1)}{\tilde{\chi}(y_2)} \right). \quad (3.26)$$

Portanto, construindo um gráfico de Γ em função de q , o cruzamento das curvas nos dará a estimativa para o expoente γ/v' .

Uma estimativa para o expoente $1/v'$ pode ser obtida a partir da derivada do cumulante de Binder (Equação 3.21). Tomando a derivada com respeito a ε

$$U'_N = \frac{\partial U(y)}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial U(y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} = N^{1/v'} \tilde{U}'(y). \quad (3.27)$$

Podemos agora tomar o módulo e o logaritmo de ambos os lados e teremos

$$\ln(|U'_N(\varepsilon)|) = \frac{1}{v'} \ln(N) + \ln(|\tilde{U}'|). \quad (3.28)$$

Desta forma o gráfico de $\ln(|U'_N(\varepsilon = 0)|)$ versus $\ln(N)$ é linear e o coeficiente angular dessa reta é igual ao expoente $1/v'$.

3.4 Aproximação de Campo Médio

Podemos usar a aproximação de campo médio (TOMÉ; OLIVEIRA, 2001) para obter uma solução aproximada para o parâmetro de ordem em função do ruído para o modelo do voto da maioria. Da expressão para o parâmetro de ordem, podemos estimar o valor crítico do parâmetro de ruído em uma rede com conectividade média igual a k (PEREIRA, 2005).

Utilizando as Equações 2.46, 3.3 e fazendo $\gamma_i = 1 - 2q_i$ podemos escrever

$$\frac{d}{dt} \langle \sigma_i \rangle = - \langle \sigma_i \rangle + \langle \gamma_i S(\sigma_i + \dots + \sigma_{k_i}) \rangle, \quad (3.29)$$

onde $\sigma_i + \dots + \sigma_{k_i}$ representam os estados dos vizinhos do sítio i e $\sigma_i^2 = 1$.

Utilizando a identidade

$$S(\sigma_1 + \dots + \sigma_{k_i}) = a_1(\sigma_1 + \dots + \sigma_{k_i}) + a_2(\sigma_1 \sigma_2 + \dots + \sigma_{k_i-1} \sigma_{k_i}) + \dots \quad (3.30)$$

Escolhendo valores para o estado de cada um dos sítios (+1 ou -1) e calculando o valor correspondente de $S(\sigma_1 + \dots + \sigma_{k_i})$ para cada conjunto de valores escolhido, obtemos um sistema de equações lineares que pode ser resolvido para fornecer os valores dos coeficientes a_j da expansão. Devido a simetria de inversão do modelo do voto da maioria, os coeficientes de ordem par são nulos, logo

$$S(\sigma_1 + \dots + \sigma_{k_i}) = a_1(\sigma_1 + \dots + \sigma_{k_i}) + a_3(\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + \dots + \sigma_{k_i-2}\sigma_{k_i-1}\sigma_{k_i}) + \dots \quad (3.31)$$

Substituindo na Equação 3.29 temos

$$\frac{d}{dt} \langle \sigma_i \rangle = -\langle \sigma_i \rangle + \bar{\gamma} \{ a_1(\langle \sigma_1 \rangle + \dots + \langle \sigma_{k_i} \rangle) + a_3(\langle \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \rangle + \dots + \langle \sigma_{k_i-2}\sigma_{k_i-1}\sigma_{k_i} \rangle) + \dots \}, \quad (3.32)$$

onde consideramos $\langle \gamma_i \rangle = 1 - 2\langle q_i \rangle = \bar{\gamma}$.

Como a aproximação de campo médio não depende da geometria da rede, mas apenas do número de ligações de cada sítio (consideraremos esse número igual ao número médio de vizinhos), a equação para a evolução temporal do parâmetro de ordem se reduz a

$$\frac{d}{dt} m = -(1 - \bar{\gamma} a_1 C_{\langle k \rangle}^1) m + \bar{\gamma} a_3 C_{\langle k \rangle}^3 m^3 + \bar{\gamma} a_5 C_{\langle k \rangle}^5 m^5 + \dots \quad (3.33)$$

com

$$C_{\langle k \rangle}^n = \frac{\langle k \rangle!}{(\langle k \rangle - n)! n!}, \quad (3.34)$$

onde usamos a seguinte aproximação de campo médio simples

$$\langle \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n \rangle = \langle \sigma_1 \rangle \langle \sigma_2 \rangle \dots \langle \sigma_n \rangle = m^n, \quad (3.35)$$

com $\langle \sigma_i \rangle = m$, independente do sítio. Fazendo $\mu = 1 - \bar{\gamma} a_1 C_{\langle k \rangle}^1$, e desprezando os termos $O(m^5)$, uma vez que estamos interessados na solução $m = 0$ na região crítica, obtemos

$$\frac{d}{dt} m = -\mu m + \bar{\gamma} a_3 C_{\langle k \rangle}^3 m^3. \quad (3.36)$$

Multiplicando ambos os lados da equação por m ,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} m^2 = -\mu m^2 + \bar{\gamma} a_3 C_{\langle k \rangle}^3 m^4, \quad (3.37)$$

ficamos com uma equação diferencial de primeira ordem para m^2 . Essa equação pode ser resolvida exatamente e sua solução é dada por

$$m^2 = \frac{m_0^2 \mu}{(\mu - \bar{\gamma} a_3 C_{\langle k \rangle}^3 m_0^2) e^{2\mu t} + m_0^2 \bar{\gamma} a_3 C_{\langle k \rangle}^3}, \quad (3.38)$$

onde $y = m^2$ e $m_0^2 = m^2(0) = y_0 = y(0)$.

Quando $t \rightarrow \infty$, ou seja no estado estacionário teremos duas possíveis soluções dependentes do sinal de μ . Para $\mu > 0$ obtemos $m = 0$, ou seja o estado paramagnético (desordenado). Para $\mu < 0$ temos a solução

$$m = \sqrt{\frac{|\mu|}{\bar{\gamma} a_3 C_{\langle k \rangle}^3}}, \quad (3.39)$$

correspondente ao estado ferromagnético (ordenado).

No ruído crítico $q = q_c$ a magnetização se anula e portanto

$$|\mu| = 1 - \bar{\gamma} a_1 C_{\langle k \rangle}^1 = 0. \quad (3.40)$$

Finalmente fazendo a substituição com os valores de μ , $\bar{\gamma}$ e $C_{\langle k \rangle}^1$ obtemos

$$q_c = \frac{1}{2(1-b)} \left(1 - \frac{1}{a_1 \langle k \rangle} \right), \quad (3.41)$$

onde no cálculo da média $\bar{\gamma} = 1 - 2 \langle q \rangle$ usamos a equação 3.4.

A partir da equação 3.41 podemos obter os parâmetros críticos $q_c(b)$, na aproximação de campo médio, para grafos aleatórios (ou outras estruturas) com diferentes valores de conectividade média. Em particular quando $\langle k \rangle \rightarrow \infty$ a equação 3.41 se reduz a

$$q_c = \frac{1}{2(1-b)}. \quad (3.42)$$

Esse caso limite do grafo completamente conectado será discutido no próximo capítulo, quando apresentarmos os resultados para o diagrama de fases obtidos das simulações.

4 Resultados

4.1 Algoritmos Usados

A fim de verificar a existência de uma transição de fase no modelo do voto da maioria com distribuição mista de ruído, desenvolvemos simulações Monte Carlo do modelo do voto da maioria definido sobre grafos aleatórios. Calculamos os valores médios da magnetização (parâmetro de ordem), da susceptibilidade (variância do parâmetro de ordem) e do cumulante de quarta ordem de Binder (medida de afastamento da distribuição normal).

4.1.1 Grafos Aleatórios

O primeiro passo para realizar as simulações propostas é gerar um grafo aleatório nos moldes do grafo proposto por Erdős e Rényi (Seção 2.2). Para gerarmos um grafo aleatório de tamanho N e conectividade média $\langle k \rangle$, primeiros sorteamos um par de sítios ij dos $N(N-1)/2$ possíveis pares do grafo. Se este par já estiver conectado, realizamos um novo sorteio, caso contrário estabelecemos uma ligação entre eles. Esse processo é repetido até que o grafo tenha $p[N(N-1)/2]$ ligações, onde $p = \langle k \rangle / (N-1)$. A intenção de utilizar esse processo é que o mesmo, como foi mostrado em (PEREIRA; MOREIRA, 2005), é mais eficiente pois tem um custo computacional menor do que verificar todas as $[N(N-1)/2]$ possíveis ligações do grafo aleatório e conectá-los com uma probabilidade p . Os grafos gerados possuem uma distribuição de ligações similar dada pela distribuição de Poisson, assim como mostrada na Seção 2.2.2.

Como comentado na Seção 2.2.3, existe uma probabilidade não nula de que alguns sítios estejam desconectados da grande ilha, formando ilhas isoladas. No intuito de considerar apenas a grande ilha e eliminar as ilhas menores dos cálculos das grandezas de interesse, utilizamos um algoritmo para conferir a existência dessa grande ilha. Como nessa dissertação o menor valor da conectividade média é $\langle k \rangle = 4$, vemos que a probabilidade de um sítio escolhido ao acaso pertencer ao componente gigante é maior do que

90% (Equação 2.4). Portanto assumiremos o valor do ponto de corte ($0,9N$) para verificar se um sítio pertence ao componente gigante, sem ter que visitar todos os sítios da rede. Escolhemos um sítio aleatoriamente de toda rede gerada. A partir desse sítio usamos o *breadth-first search* (RUSSELL; NORVIG, 2003), que é um algoritmo de busca em grafos, para determinar o número de sítios conectados em uma ilha. Se é maior ou igual ao ponto de corte, então temos identificado a grande ilha, caso contrário iremos escolher outro sítio aleatoriamente a fim de repetir a busca.

4.1.2 Simulações Monte Carlo

Usamos os geradores de números aleatórios para distribuição uniforme e distribuição gaussiana descritos no livro (PRESS et al., 1992). A simulação do modelo do voto da maioria em grafos aleatórios é realizada da seguinte forma: em um grafo com N sítios e conectividade média $\langle k \rangle$, associa-se a resistência q_i de acordo com a Equação 3.4 onde o q é dado por

$$\mathbb{P}(q) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(q-\bar{q})^2}{2\sigma^2}}. \quad (4.1)$$

Consideraremos a versão congelada (*quenched*) do modelo na qual os valores $q_i; i = 1 \dots N$ permanecem inalterados ao longo da simulação para uma dada amostra. Nessa dissertação consideramos $\sigma = 0.01$ e o valor de $\bar{q} \in [0, 1]$.

A evolução do sistema é então inicializada a partir de uma configuração de spins com aproximadamente a metade dos σ_i apontando em uma direção e a outra metade na direção contrária (50% com valor $+1$ e 50% com valor -1). Escolhe-se um sítio aleatoriamente e inverte-se seu estado com a probabilidade dada pela equação 3.3. O sistema evolui no tempo, e, após um tempo característico de relaxação t_R , atinge uma distribuição de estado estacionário, no sentido que não ocorrem mudanças significativas para $t > t_R$. Ou seja, partindo de configurações diferentes o tempo de relaxação é o tempo necessário para que os valores das grandezas estudadas no tempo $t > t_R$ estejam distribuídas em torno de um valor médio. Finalmente, atingido o regime de estado estacionário, calculamos o valor médio das grandezas de interesse durante o intervalo de tempo t_M . Repetimos o mesmo procedimento para diferentes grafos (amostras) e para cada valor de \bar{q} no intervalo $[0, 1]$. A unidade de tempo corresponde a um passo de Monte Carlo ou *Monte Carlo Step* (MCS) definido como N tentativas de inversão de spin. Note que o tempo total de evolução do sistema é igual a $t_R + t_M$. Por exemplo para $b = 0$, usamos $t_R = 10000$ MCS e $t_M = 5000$ MCS, com 10 diferentes grafos e para cada uma delas 10 distribuições dos valores de ruído diferentes. Portanto para cada valor de \bar{q} as médias foram calculadas considerando-se o

total de $10^2 * t_M$ configurações de estados estacionários. À medida que b cresce há uma necessidade de um aumento dos tempos t_R e t_M bem como o número de amostras. Por exemplo, quando $b = 0.1$ usamos 15^2 repetições, $t_R = 15000$ MCS e $t_M = 10000$ MCS. Para $b = 0.2$ temos 80^2 repetições e para $b = 0.3$ temos 120^2 repetições. Note que para $b = 0.1$ por exemplo, tem-se 90% dos sítios com um determinado valor de q (de acordo com a Equação 4.1) e 10% dos sítios sem parâmetro de ruído.

4.2 Resultados Anteriores do Modelo do Voto da Maioria

O modelo do voto da maioria tem sido amplamente estudado por diversos autores ao longo dos anos. Para referências ver por exemplo o artigo de revisão de Castellano et al (CASTELLANO et al., 2009). Galam (1986), por exemplo, aplicou o modelo do voto da maioria usando um viés de opinião que descreve o modelo de voto em uma sociedade hierárquica. Na rede quadrada regular, o primeiro estudo do modelo do voto da maioria com ruído foi realizado por Oliveira et al. (TOME et al., 1991; OLIVEIRA, 1992) enquanto que Pereira (PEREIRA; MOREIRA, 2005) realizaram o estudo deste modelo em Grafos Aleatórios (GA). A Tabela 4.1 mostra os valores do parâmetro de ruído crítico obtidos por estes autores, na aproximação de campo médio e nas simulações de Monte Carlo. Considerando-se o caso $\langle k \rangle = 4$, nota-se que os resultados das simulações dependem da topologia da rede ao contrário do observado na aproximação de campo médio (Equação 3.41). Por outro lado os resultados de campo médio se aproximam dos valores simulados com o crescimento da conectividade média, tornando-se exato no limite da rede completamente conectada.

Tabela 4.1: Valores críticos do parâmetro de ruído obtidos através da aproximação de campo médio (CM) e de simulações Monte Carlo (MC)

	$\langle k \rangle$	q_c CM	q_c MC
Rede Quadrada Regular	4	0.1667	0.075 ± 0.001
	4	0.1667	0.181 ± 0.001
Grafo Aleatório	10	0.2968	0.2998 ± 0.0004
	20	0.3581	0.3586 ± 0.0002

Com relação aos expoentes críticos consideramos inicialmente o trabalho publicado por Onsager (1944), onde ele calcula os valores exatos dos expoentes críticos para a modelo de Ising em duas dimensões. Comparando-se esses resultados (mostrados na Tabela 4.2) com os obtidos por Oliveira (1992) pode-se concluir que o modelo do voto

da maioria com ruído, definido em uma rede quadrada, pertence à mesma classe de universalidade do modelo de Ising bidimensional. Isso se deve ao fato de que modelos de não equilíbrio com simetria de inversão pertencem à mesma classe de universalidade do modelo de Ising (GRINSTEIN et al., 1985).

Outro ponto importante, que foi previamente estudado, corresponde ao efeito de uma anisotropia na probabilidade de inversão, sobre o comportamento crítico do modelo do voto da maioria. Santos e Teixeira (1995) mostraram que a introdução da anisotropia não altera a classe de universalidade do modelo. Eles consideraram um modelo no qual a probabilidade de inversão de um spin depende apenas de dois de seus vizinhos (versão unidimensional) com uma probabilidade α e dos quatro vizinhos (versão bidimensional) com probabilidade $(1 - \alpha)$.

Tabela 4.2: Expoentes críticos do modelo do voto da maioria com ruído na rede quadrada^a, na rede aleatória^b, e do modelo de Ising^c.

	β/v	γ/v	$1/v$	D
Ising	0.125	1.75	1	2
Rede Quadrada Regular	0.125 ± 0.005	1.73 ± 0.05	1.01 ± 0.05	2
GA $\langle k \rangle = 4$	0.242(6)	0.515(6)	0.51(3)	1.02(2)
GA $\langle k \rangle = 10$	0.259(1)	0.502(5)	0.46(1)	1.00(1)
GA $\langle k \rangle = 20$	0.255(4)	0.503(2)	0.50(2)	1.01(1)

a:(OLIVEIRA, 1992), b:(PEREIRA; MOREIRA, 2005), c:(ONSAGER, 1944)

Com relação aos expoentes do grafo aleatório foi observado uma pequena dependência na conectividade média $\langle k \rangle$, para maiores detalhes ver referências (PEREIRA; MOREIRA, 2005; PEREIRA, 2005). No entanto verifica-se que para todos os valores de $\langle k \rangle$, levando-se em consideração as incertezas associadas, a relação de hiper-escala é satisfeita com $D = 1.0$.

4.3 Nossos Resultados

4.3.1 Magnetização

Uma das formas de analisar a existência da transição de fase do modelo (ordem-desordem) é através do parâmetro de ordem $M_N(\bar{q})$ como descrito na Seção 3.2. A Figura 4.1 mostra o comportamento do parâmetro de ordem do sistema em função do parâmetro de ruído, obtido das simulações em grafos aleatórios com $\langle k \rangle = 4$ e quatro diferentes

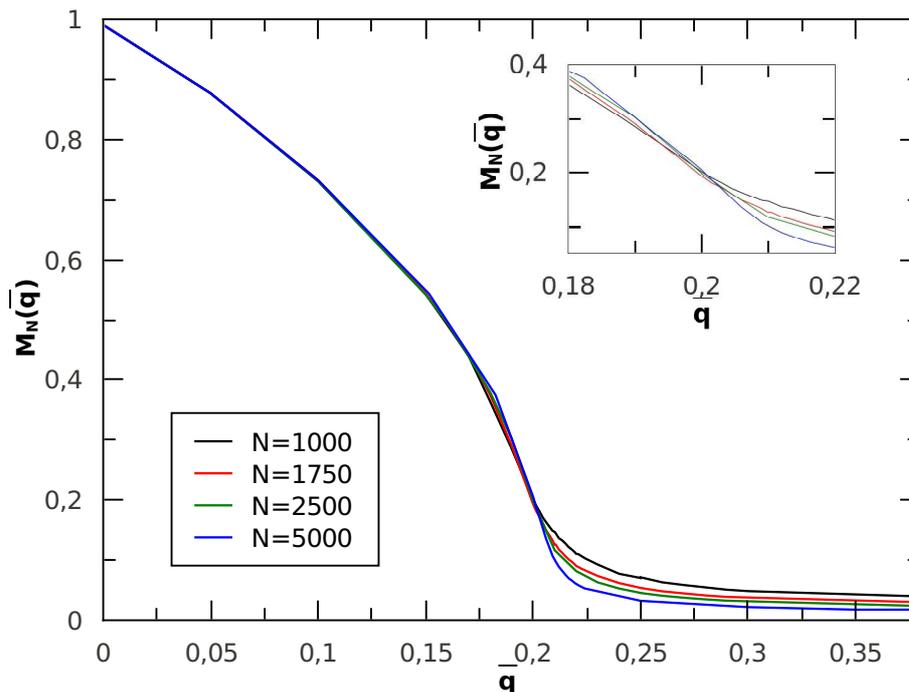


Figura 4.1: Magnetização em função do ruído para $b = 0.1$, no grafo aleatório com $\langle k \rangle = 4$ e quatro diferentes valores de N . No detalhe mostramos a dependência de M_N com o tamanho do sistema na região crítica.

valores de N , no caso particular $b = 0.1$. É possível observar que o parâmetro de ordem apresenta uma variação com N e \bar{q} mais acentuada na região crítica, em torno de 0.2, mostrada no detalhe da figura. Esse comportamento indica a ocorrência de uma transição do tipo “ordem-desordem” de segunda ordem. Antes da transição as curvas são praticamente superpostas, apresentando uma dependência com N apenas na região crítica e após a mesma. Nesta região, a magnetização assume valores decrescentes com o tamanho do sistema e possui uma tendência a zero no limite termodinâmico ($N \rightarrow \infty$).

A dependência do parâmetro de ordem com a fração b de indivíduos com ausência de ruído, é mostrada na Figura 4.2. Os dados para $M_N(\bar{q})$ foram obtidos em grafos com conectividade média igual a quatro, $N = 2500$ e com diversos valores de b . Do comportamento das curvas, podemos ver que em todos os valores de b estudados temos a ocorrência de uma transição ordem-desordem no sistema. Também observamos, que o valor onde a transição ocorre é uma função crescente de b , ou seja, quanto maior a fração de sítios com ausência de ruído, maior é o valor do ruído médio necessário para levar o sistema do estado ordenado para o estado desordenado.

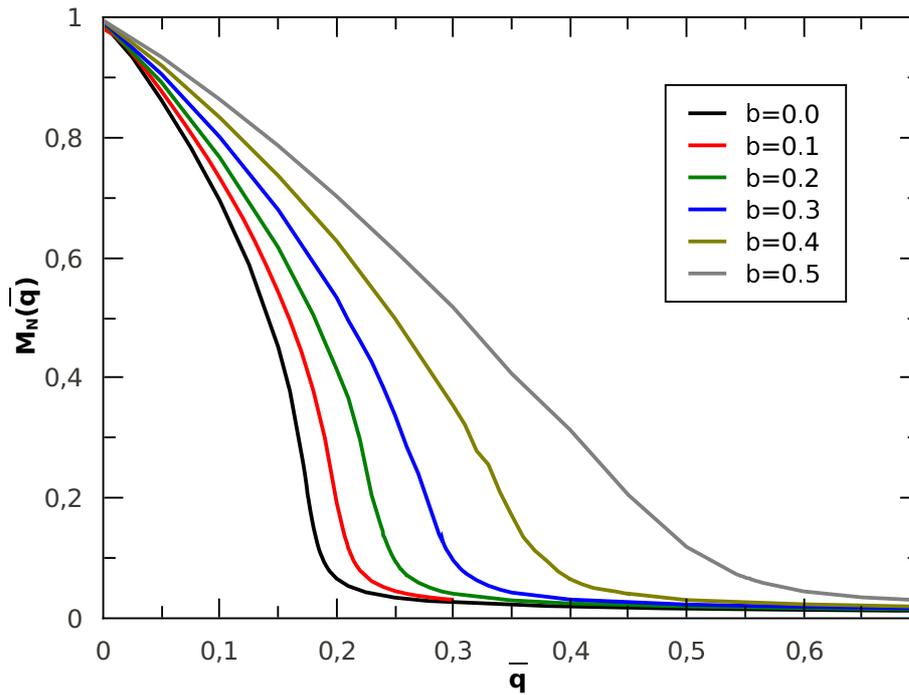


Figura 4.2: Magnetização em função do ruído para $N = 2500$ na rede aleatória com $\langle k \rangle = 4$, e valores da fração de indivíduos sem ruído $b = 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ e 0.5 (da esquerda para a direita).

4.3.2 Susceptibilidade

A Figura 4.3 mostra o comportamento da susceptibilidade em função de \bar{q} no grafo aleatório com $b = 0.1$, $\langle k \rangle = 4$, e $N = 1000, 1750, 2500$, e 5000 . De forma similar à magnetização, a susceptibilidade demonstra ter um comportamento suave, exceto para o intervalo do parâmetro de ruído identificado como a região crítica. Nesta região a dependência com N e q é bastante acentuada e apresenta um comportamento característico de sistemas que apresentam uma transição de fase de segunda ordem. O valor do ruído onde ocorre o máximo da susceptibilidade tem uma dependência com o tamanho da rede, devido a efeitos de tamanho finito do sistema (Seção 3.3). Desta forma o valor de q onde a susceptibilidade é máxima nos dá uma estimativa do valor crítico do parâmetro de ruído $q_c(N)$.

Analisamos ainda a dependência da susceptibilidade com a fração b de indivíduos desprovidos de ruído. Na Figura 4.4 mostramos as curvas $\chi_N(\bar{q})$ para grafos aleatórios com $N = 2500$ e $\langle k \rangle = 4$ para diversos valores de b . Podemos observar que as intensidades (larguras) das flutuações diminuem (aumentam) com o aumento dos valores de b .

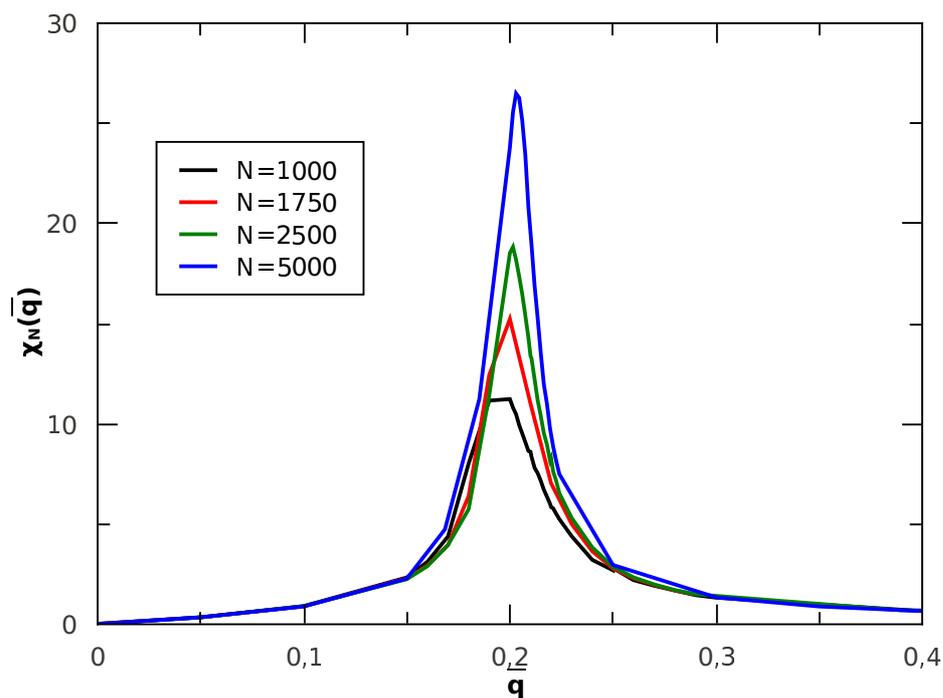


Figura 4.3: Susceptibilidade em função do ruído para $b = 0.1$, no grafo aleatório com $\langle k \rangle = 4$ e $N = 1000, 1750, 2500$, e 5000 .

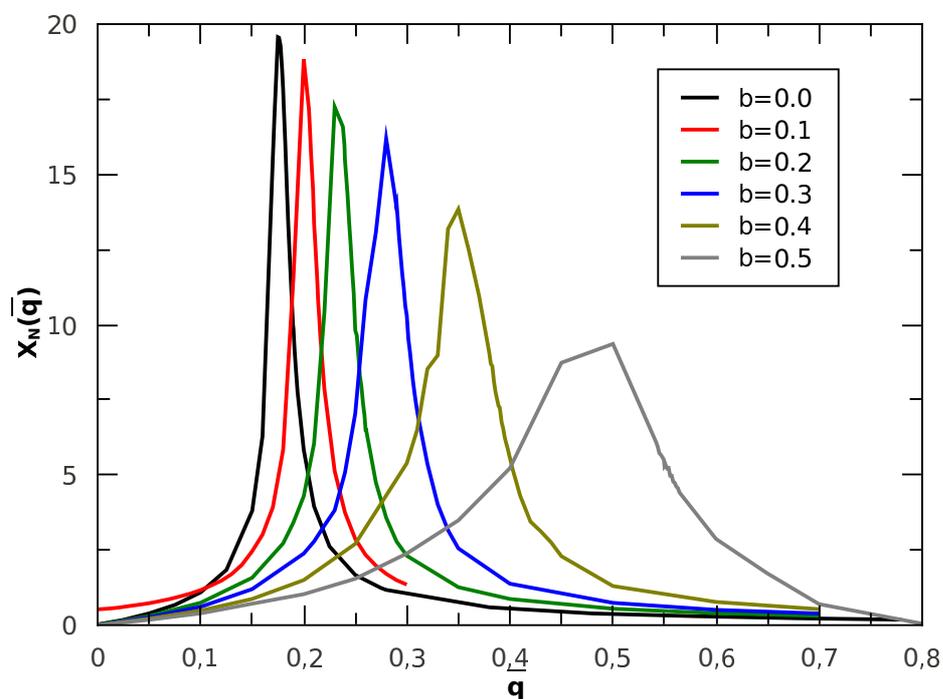


Figura 4.4: Susceptibilidade em função do ruído para $N = 2500$ na rede aleatória com $\langle k \rangle = 4$. Da esquerda para a direita $b = 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ e 0.5 .

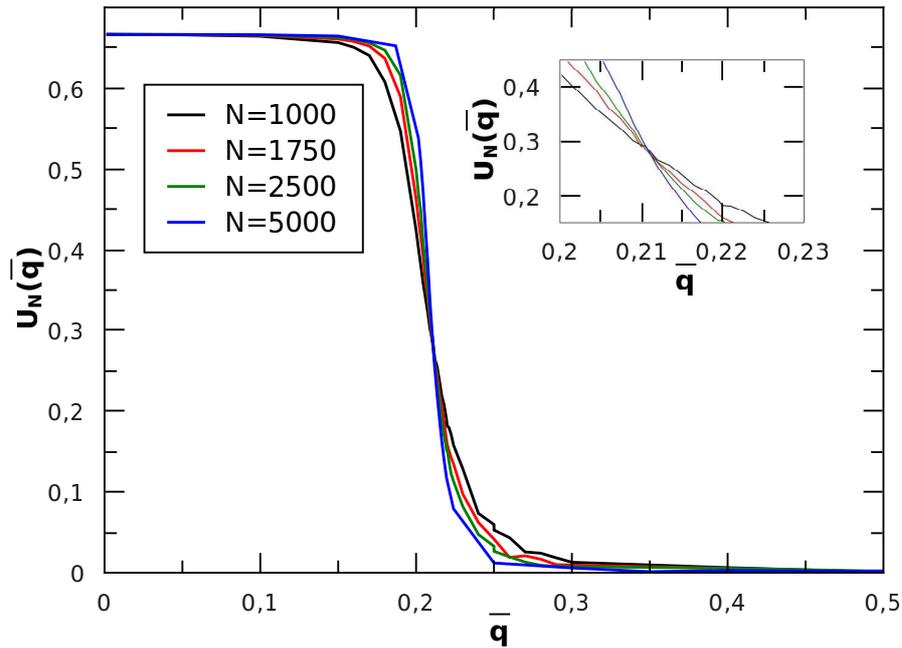


Figura 4.5: Cumulante de quarta ordem de Binder em função do parâmetro de ruído para $b = 0.1$ e diferentes valores de N na rede aleatória com $\langle k \rangle = 4$. No detalhe apresentamos apenas a região próxima ao ponto crítico.

4.3.3 O Cumulante de Binder

Calculamos o cumulante de quarta ordem de Binder com o objetivo de obter os valores críticos do parâmetro de ruído q_c . A partir da Equação 3.7 vimos que o valor do cumulante no ponto crítico é independente do tamanho do sistema, isto é, mesmo com tamanhos diferentes de redes (para um mesmo $\langle k \rangle$ e b) as curvas $U_N(q)$ devem se interceptar em $q = q_c$. A Figura 4.5 mostra as curvas $U_N(q)$ para o grafo aleatório com $b = 0.1$, $\langle k \rangle = 4$ e $N = 1000, 1750, 2500$, e 5000 . No detalhe apresentamos apenas a região próxima ao ponto crítico. Na Figura 4.6 mostramos o cruzamento das curvas de forma mais clara. Neste caso, utilizamos quatro diferentes tamanhos para o grafo aleatório com $\langle k \rangle = 20$ e $b = 0.1$. Em particular a interseção das curvas ocorrem em $q_c = 0.405 \pm 0.001$.

Na Figura 4.7 mostramos a região onde ocorrem os cruzamentos (região crítica) das curvas do cumulante de quarta ordem de Binder para $\langle k \rangle = 10$, três valores de b e tamanhos de redes $N = 1000, 2500, 6400$, e 10000 . Vemos que a intersecção das curvas para um dado valor de b ocorre para valores do parâmetro de ruído crítico que aumentam com o número de indivíduos sem resistência. Essa dependência do ruído crítico com b também

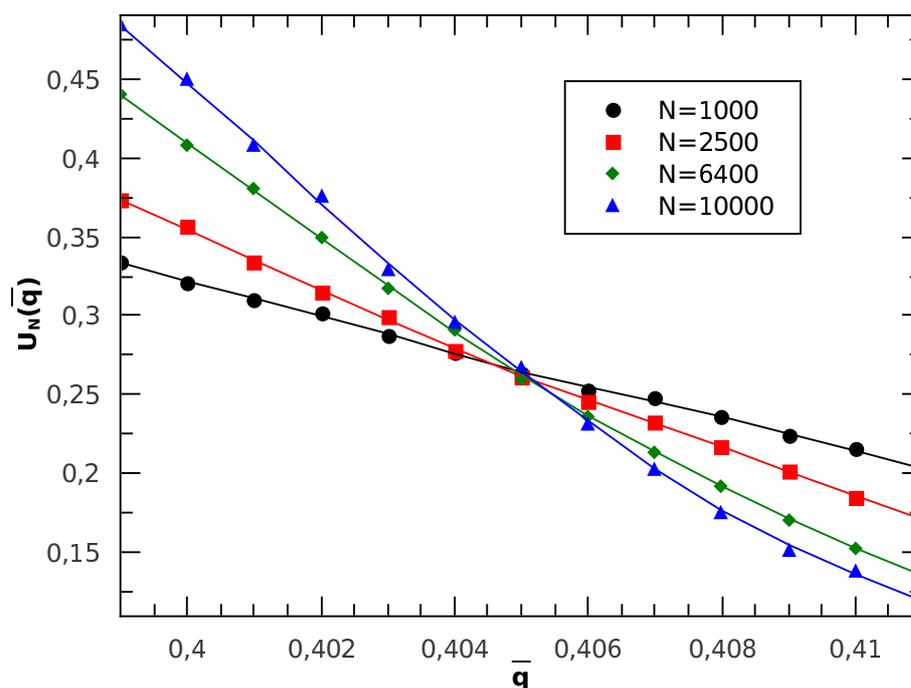


Figura 4.6: Cumulante de quarta ordem de Binder na região crítica para grafos aleatórios com $\langle k \rangle = 20$ e $b = 0.1$. Os dados foram obtidos nas simulações Monte Carlo e as linhas são ajustadas através de uma suavização.

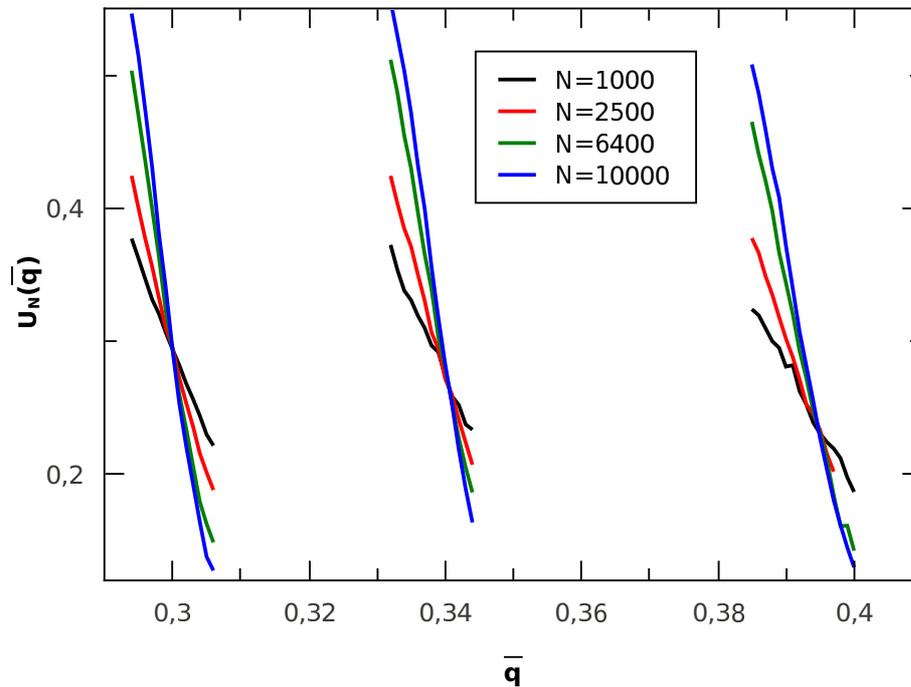


Figura 4.7: Cruzamento das curvas do cumulante de quarta ordem de Binder em uma grafo aleatório com $\langle k \rangle = 10$, para os tamanhos $N = 1000, 2500, 6400,$ e 10000 e da esquerda para a direita $b = 0.0, 0.1,$ e 0.2 .

Tabela 4.3: Valores críticos do parâmetro de ruído obtidos através de simulações Monte Carlo, para diferentes valores da fração de sítios com ausência de ruído em grafos aleatórios com $\langle k \rangle = 4, 10$ e 20 . Os resultados de campo médio (CM) são também indicados.

$\langle k \rangle$	$q_c^{b=0.0}$	$q_c^{b=0.1}$	$q_c^{b=0.2}$	$q_c^{b=0.3}$	$q_c^{b=0.4}$	$q_c^{b=0.5}$
4	0.184(1)	0.212(3)	0.248(1)	0.300(3)	0.392(5)	0.56(1)
10	0.300(1)	0.338(1)	0.395(1)	0.470(2)	0.592(1)	0.760(7)
20	0.359(1)	0.405(1)	0.474(1)	0.552(2)	0.674(1)	0.852(7)
CM	0.500	0.556	0.625	0.715	0.833	1.00

foi observada através das curvas para o parâmetro de ordem e a susceptibilidade. Quanto ao valor do cumulante de Binder no ponto crítico, obtivemos $U_b^* = U_b(q_c)$ onde $U_{b=0.0}^* = 0.294(1)$, $U_{b=0.1}^* = 0.277(1)$ e $U_{b=0.2}^* = 0.230(1)$. A dependência de U^* com o parâmetro b é indicativo da quebra de universalidade no modelo com a introdução da heterogeneidade do ruído, que deve também ser observada a partir do cálculo dos expoentes críticos como será visto adiante.

4.4 Diagrama de Fases

Através da análise do cumulante de quarta ordem de Binder na região crítica estimamos o valor crítico do parâmetro de ruído para diversos valores de b , em grafos aleatórios com $\langle k \rangle = 4, 10$ e 20 , reunindo-os na Tabela 4.3. Os resultados de campo médio (equação 3.41) para o caso do grafo completamente conectado ($\langle k \rangle = N - 1 \rightarrow \infty$) corresponde ao limite superior dos resultados das simulações de Monte Carlo com $\langle k \rangle$ finito.

A partir dos valores da tabela 4.3 construímos o diagrama de fase no plano q_c versus b , apresentado na Figura 4.8. Inicialmente, comparando o diagrama de fases do nosso modelo com os resultados anteriormente obtidos (PEREIRA; MOREIRA, 2005) para o caso $b = 0.0$ (distribuição uniforme de ruído), vemos que há uma concordância dentro das faixas de erro. Para uma coordenação k fixa vemos que a região de ordenamento (consenso) aumenta com a diminuição do número de sítios desprovidos de ruído, ou seja, com o aumento do parâmetro b . Por outro lado, para b fixo, o consenso é mais facilmente atingido quando se tem uma conectividade média maior. Observe que ambas as dependências de q_c em b e $\langle k \rangle$ são resultados que estão de acordo com o senso comum.

Finalmente um importante resultado que emerge da nossa análise é a existência de um limite superior para a fração de sítios sem ruído, b_{max} , a partir do qual ocorre a formação de consenso independentemente do valor do ruído no intervalo $[0, 1]$. Na aproximação de

campo médio esse valor é $b_{max} = 0.5$, enquanto que os resultados da simulação em grafos aleatórios indicam $b_{max} \approx 0.6$.

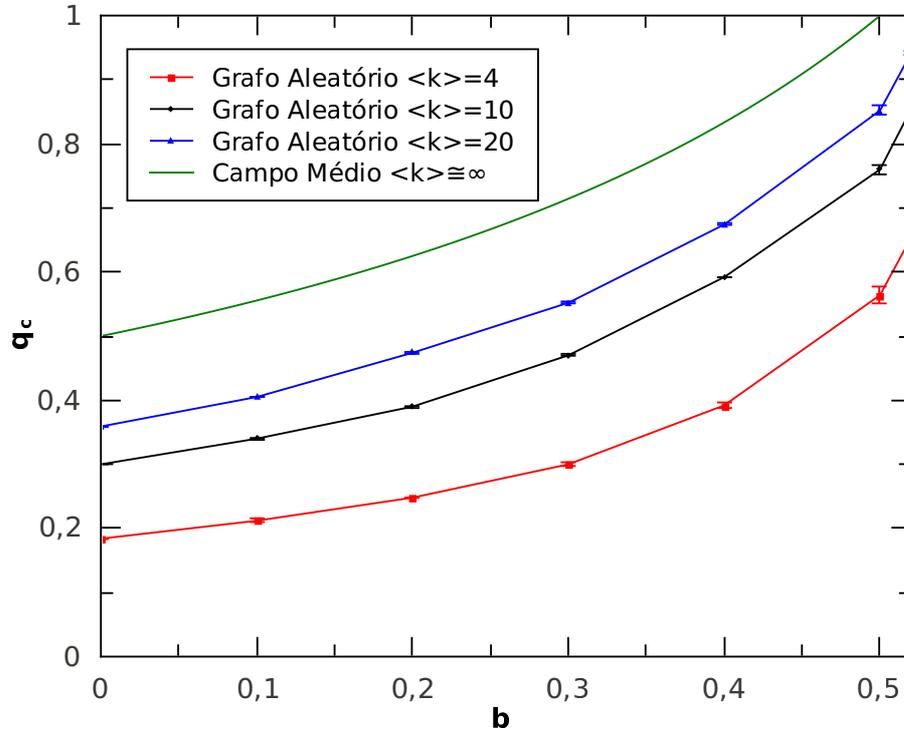


Figura 4.8: Diagrama de fases para o modelo do voto da maioria com distribuição mista de ruídos. Na região abaixo das curvas o sistema se encontra em um estado ordenado (região de consenso), para pontos acima temos a fase desordenada (ausência de consenso). A curva correspondente ao campo médio é dada pela equação 3.41.

4.5 Expoentes Críticos

Como descrito na seção 3.3, utilizamos as funções Λ_{N_1, N_2} (equação 3.24) e Γ_{N_1, N_2} (equação 3.26) para estimar os expoentes β/v' e γ/v' . Nas figuras 4.9 e 4.10 mostramos o comportamento destas funções com o parâmetro N de ruído no grafo aleatório para $\langle k \rangle = 4$ e $b = 0.1$ com vários valores de N . A partir da intersecção das curvas para a função Λ , estimamos os valores de $\beta/v' = 0.216 \pm 0.002$ e $q_c = 0.212 \pm 0.001$. Analogamente, da intersecção das curvas para Γ , estimamos os valores de $\gamma/v' = 0.482 \pm 0.002$ e $q_c = 0.212 \pm 0.001$. É importante lembrar que o erro associado a cada estimativa é obtido considerando-se todas as intersecções para os diferentes pares de curvas analisadas.

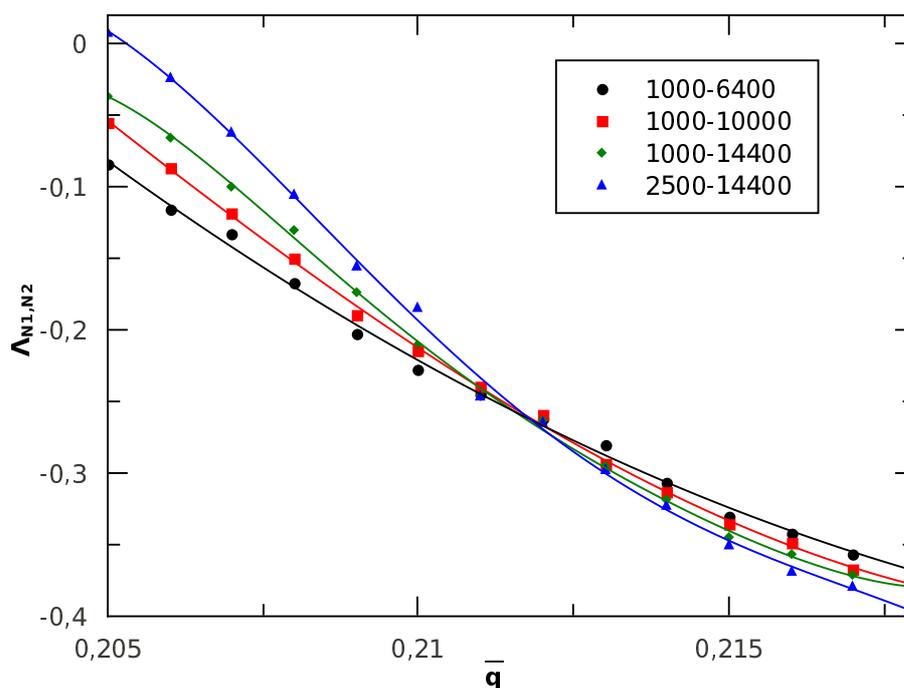


Figura 4.9: Dependência da função Λ_{N_1, N_2} com o ruído no grafo aleatório, para $\langle k \rangle = 4$, $b = 0.1$ e tamanhos de redes indicados. As linhas são ajustadas através de um ajuste polinomial.

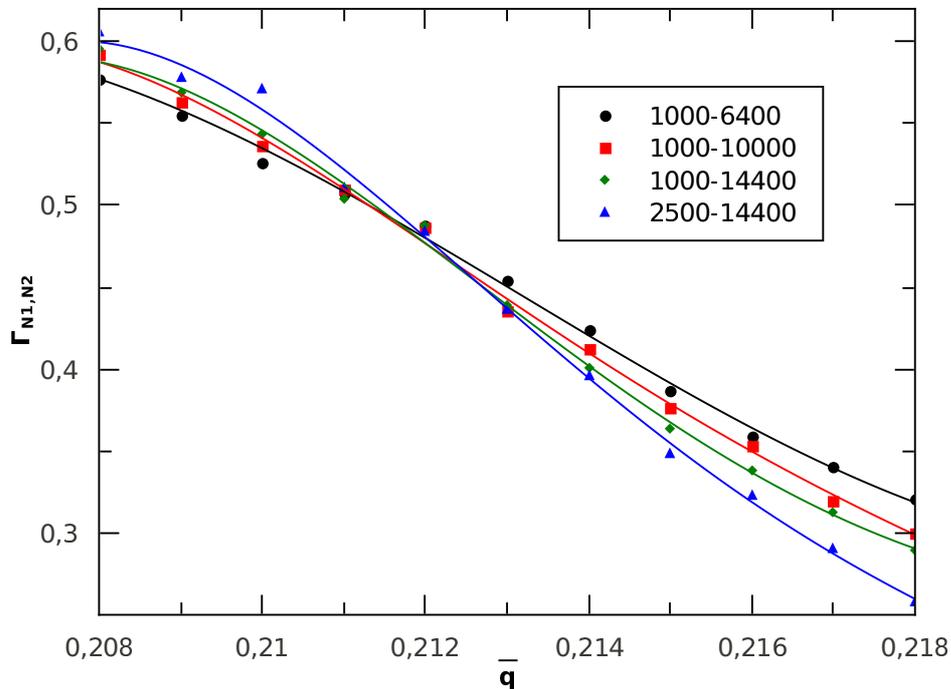


Figura 4.10: Dependência da função Γ_{N_1, N_2} com o ruído no grafo aleatório, para $\langle k \rangle = 4$, $b = 0.1$ e tamanhos de redes indicados. As linhas são ajustadas através de um ajuste polinomial.

Tabela 4.4: Expoentes críticos do modelo do voto da maioria com distribuição mista de ruído em grafos aleatórios.

	β/v'	γ/v'	$1/v'$	D
$\langle k \rangle = 4$				
$b = 0.0$	0.24(2)	0.52(2)	0.54(6)	1.0
$b = 0.1$	0.26(2)	0.48(1)	0.48(5)	1.011
$b = 0.2$	0.278(4)	0.454(2)	0.52(2)	1.009
$\langle k \rangle = 10$				
$b = 0.0$	0.249(1)	0.504(1)	0.523(6)	1.002
$b = 0.1$	0.265(2)	0.475(3)	0.477(3)	1.005
$b = 0.2$	0.276(1)	0.451(1)	0.49(8)	1.003
$\langle k \rangle = 20$				
$b = 0.0$	0.256(3)	0.492(3)	0.506(3)	1.004
$b = 0.1$	0.262(6)	0.474(9)	0.527(7)	0.998
$b = 0.2$	0.278(7)	0.441(8)	0.52(3)	0.998

Finalmente, mas não menos importante, foi calculado o valor do expoente $1/v'$. Para isso utilizamos a dependência com o tamanho do sistema da derivada do cumulante de Binder em relação ao ruído, no ponto crítico, assim como discutido na seção 3.3. A Figura 4.11 apresenta os pontos calculados através das simulações e os melhores ajustes lineares para os mesmos para o grafo aleatório com $\langle k \rangle = 4$ e $\langle k \rangle = 10$. A inclinação da reta obtida pelo ajuste linear dos pontos define o valor do expoente $1/v'$. Concluímos que a repetição desse procedimento para outros valores de b resultam em um pequena variação do expoente $1/v'$ (a inclinação da reta).

Para obter a estimativa para a dimensão efetiva utilizamos os valores calculados dos expoentes críticos e a relação de hiper-escala definida na equação 3.22. Considerando as incertezas associadas, para os valores de $\langle k \rangle$ e b estudados, a relação de hiper-escala é satisfeita com $D = 1.0$. A tabela 4.4 contém um resumo dos nossos resultados através das simulações de Monte Carlo para expoentes críticos e a dimensionalidade efetiva. A dependência dos expoentes críticos com o parâmetro b indica que o modelo do voto da maioria com distribuição mista de ruído pertence a classe de universalidade diferente do modelo usual ($b = 0$).

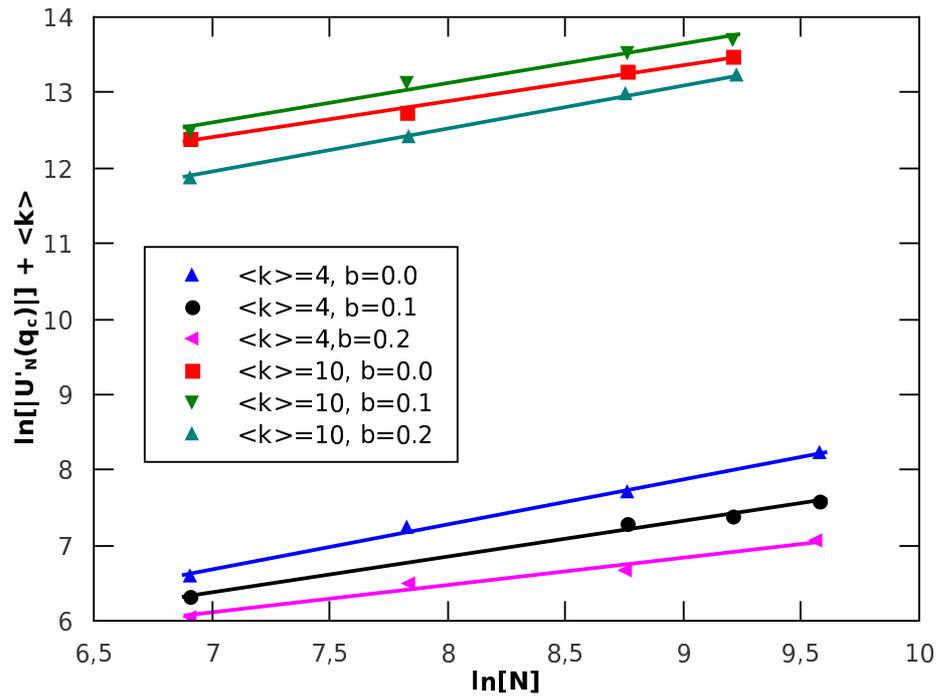


Figura 4.11: Dependência da função $\ln[U'_N(q_c)] + \langle k \rangle$ com $\ln[N]$ no grafo aleatório, para diferentes valores de b e $\langle k \rangle = 4$ e 10 . O coeficiente angular da reta calculado pelo ajuste linear dos dados obtidos numericamente definem o valor do expoente $1/\nu'$.

4.6 Colapso de Dados

Vamos considerar o colapso de dados para a magnetização e para a susceptibilidade (este procedimento também é conhecido como “data collapse”). Este procedimento permite obter, de forma independente, os expoentes e os parâmetros de ruído críticos, e compará-los com os resultados mostrados na seção anterior. Para isso usaremos as relações de escala de tamanho finito da magnetização e da susceptibilidade mostradas na seção 3.3. Teremos então:

$$M_N(q) = N^{-\beta/\nu'} \tilde{M}(N^{1/\nu'}(q - q_c)), \quad (4.2)$$

$$\chi_N(q) = N^{\gamma/\nu'} \tilde{\chi}(N^{1/\nu'}(q - q_c)). \quad (4.3)$$

Dessas duas equações obtemos as funções universais $\tilde{M}(y)$ e $\tilde{\chi}(y)$

$$\tilde{M}(y) = M_N(q) N^{\beta/\nu'}, \quad (4.4)$$

$$\tilde{\chi}(y) = \chi_N(q) N^{-\gamma/\nu'}, \quad (4.5)$$

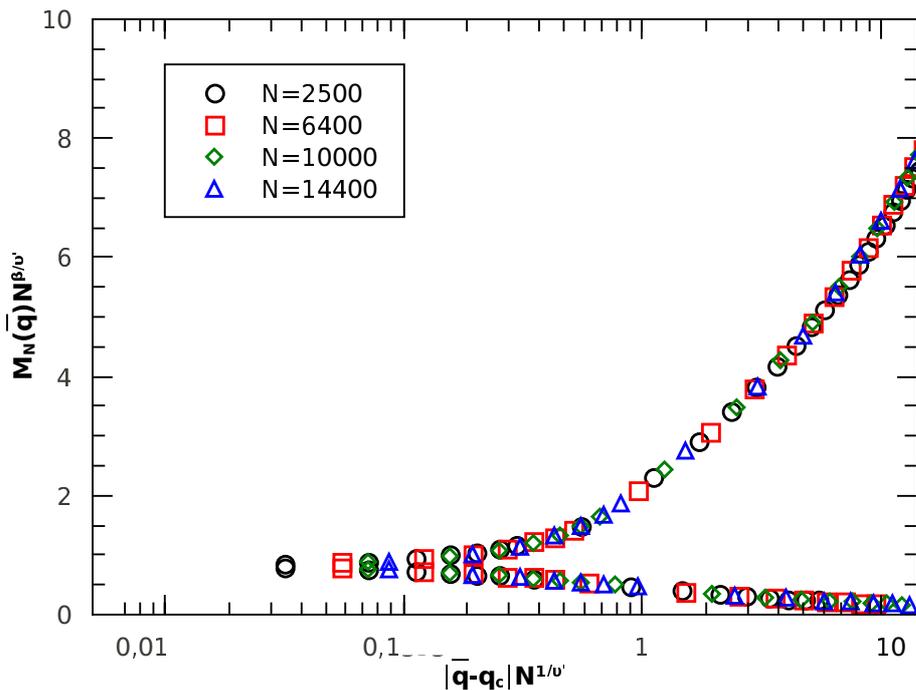


Figura 4.12: Colapso de dados para o parâmetro de ordem no grafo aleatório, para $\langle k \rangle = 4$ e $b = 0.1$.

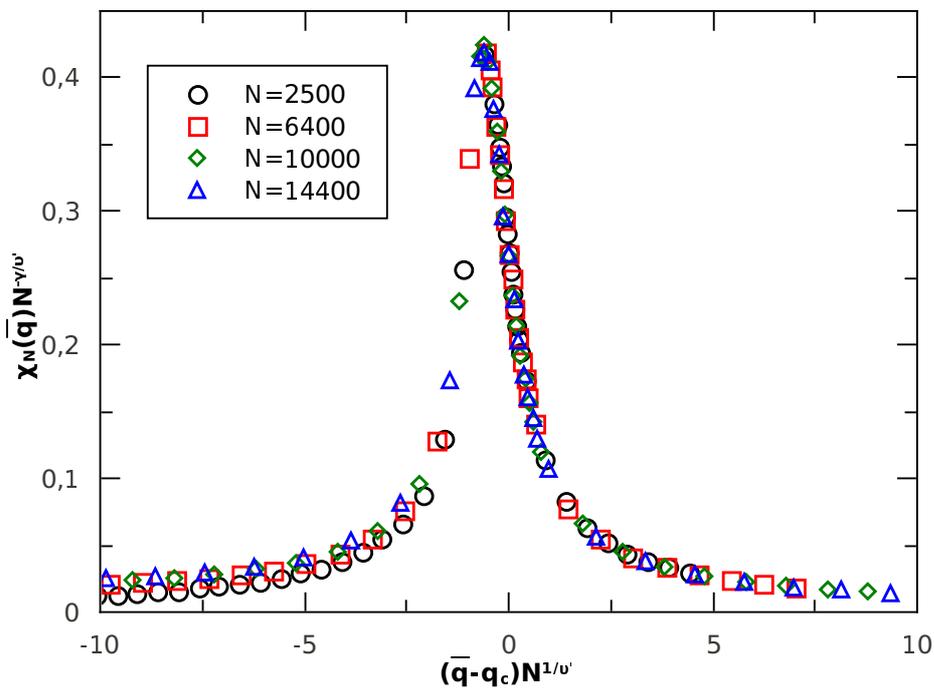


Figura 4.13: Colapso de dados para a susceptibilidade no grafo aleatório, para $\langle k \rangle = 4$ e $b = 0.1$.

onde $y = N^{1/\nu}(\bar{q} - q_c)$ corresponde à variável de escala.

Isto significa que fazendo a transformação adequada nas variáveis, teremos como resultado o gráfico de uma função universal, onde as curvas $\tilde{M}(y)$ e $\tilde{\chi}(y)$ para diferentes

valores de N devem colapsar resultando em uma única curva. A região de colapso das curvas deve se estender por toda a região crítica e quanto melhores forem as estimativas dos expoentes e do ruído crítico, melhor será o colapso das curvas.

Na figura 4.12 mostramos o colapso de dados para o parâmetro de ordem do sistema em grafos aleatórios com $\langle k \rangle = 4$ e $b = 0.1$ para grafos de tamanho $N = 2500, 6400, 10000,$ e 14400 . O colapso de dados foi obtido utilizando os valores $q_c = 0.212$, $\beta/v' = 0.262$ e $1/v' = 0.49$ que concordam com os valores indicados nas tabelas 4.3 e 4.4. É possível ver que o colapso resultante é de boa qualidade por aproximadamente quatro décadas, o que nos leva a acreditar na boa consistência da nossa análise.

De forma análoga, na figura 4.13 mostramos o colapso de dados para a susceptibilidade em grafos aleatórios com $\langle k \rangle = 4$ e $b = 0.1$, novamente com tamanhos de rede $N = 2500, 6400, 10000,$ e 14400 . Os valores utilizados foram $\gamma/v' = 0.48$, com q_c e $1/v'$ sendo os mesmos para o colapso de dados do parâmetro de ordem. Observamos na figura um bom colapso das curvas para diferentes valores de N , confirmando dessa vez a boa estimativa de $q_c, 1/v$ e γ/v .

5 Conclusões

Propusemos e estudamos uma generalização do modelo do voto da maioria com ruído, que leva em conta a possibilidade de distribuição de ruído não homogênea entre os sítios da rede. Realizamos simulações de Monte Carlo em grafos aleatórios de vários tamanhos N e conectividade média $\langle k \rangle$. Calculamos a magnetização, a susceptibilidade e o cumulante de Binder em função do parâmetro de ruído (q) e da fração de sítios sem ruído (b). Através da análise de tamanho finito, que permite eliminar a dependência em N para obter o diagrama de fases no limite termodinâmico, além do cálculo dos expoentes críticos do modelo, obtivemos as curvas de transição de fases no plano q_c versus b , separando as fases ordenada (onde ocorre a formação de consenso, para $q < q_c(b)$) e desordenada (onde não há consenso). Notamos que, para um dado valor de $\langle k \rangle$, o parâmetro crítico de ruído é uma função crescente de b , enquanto que a região de consenso aumenta para sistemas com maiores valores da conectividade média. Uma análise de campo médio, que é exata no limite do grafo completamente conectado ($\langle k \rangle = N - 1 \rightarrow \infty$), permite-nos obter o limite superior para as curvas de transição de fase dado por: $q_c(b) = 1/2(1 - b)$. Este resultado sugere que para $b > 0.5$ o sistema sempre se ordena independentemente do valor do parâmetro de ruído. De fato, para os grafos com $\langle k \rangle = 4, 10$ e 20 que simulamos, o correspondente valor de b é próximo de 0.6 .

Quanto aos expoentes críticos, nossos resultados indicam expoentes que variam com os valores da conectividade e da fração de elementos sem ruído. Comparados com o caso $b = 0$, nossos resultados sugerem que a desordem inerente aos sistemas com $b > 0$ é relevante na determinação da classe de universalidade (diferentes da classe de Ising). Por outro lado, assim como indicam os resultados de simulações do modelo do voto da maioria com $b = 0$, e de outros modelos em grafos aleatórios, os expoentes críticos que obtivemos satisfazem a relação de hiperescala com dimensionalidade efetiva igual a um.

Embora o modelo que estudamos represente uma generalização mais realista que o modelo do voto da maioria com distribuição uniforme de ruídos ($b = 0$), vários outros estudos podem ser realizados para levar em conta, por exemplo:

1. A influência da topologia da rede, considerando-se geometria de redes regulares ou ainda com estrutura de pequenos mundos;
2. A dependência dos resultados com a escolha da função de distribuição mista de ruídos. Aqui, escolhemos uma distribuição bimodal que consiste de uma função δ em $q = 0$ e uma gaussiana centrada em $q = \bar{q}$ mas com largura fixa em $\sigma = 0.01$. Outras formas de distribuição podem ser interessantes de serem investigadas;
3. Finalmente, pode ser interessante a análise da versão com desordem temperada (*annealed*) do nosso modelo. Aqui, consideramos apenas o caso de desordem congelada (*quenched*).

Referências Bibliográficas

ALBERT, R.; BARABÁSI, A.-L. Statistical mechanics of complex networks. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 74, n. 1, p. 47–97, Jan 2002.

BELLOMO, N. *Modeling Complex Living Systems: A Kinetic Theory and Stochastic Game Approach*. 1st. ed. [S.I.]: Birkhäuser Basel, 2007. ISBN 0817645101, 9780817645106.

BINDER, K. Finite size scaling analysis of ising model block distribution functions. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, Springer Berlin / Heidelberg, v. 43, p. 119–140, 1981. ISSN 0722-3277. 10.1007/BF01293604. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF01293604>>.

BOLLOBAS, B. *Random Graphs*. [S.I.]: Cambridge University Press, 2001.

CAMPOS, P. R. A.; OLIVEIRA, V. M. de; MOREIRA, F. G. B. Small-world effects in the majority-vote model. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 67, n. 2, p. 026104, Feb 2003.

CARRERAS, B. A.; LYNCH, V. E.; DOBSON, I.; NEWMAN, D. E. Complex dynamics of blackouts in power transmission systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, AIP, v. 14, n. 3, p. 643–652, 2004. Disponível em: <<http://link.aip.org/link/?CHA/14/643/1>>.

CASTELLANO, C.; FORTUNATO, S.; LORETO, V. Statistical physics of social dynamics. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 81, n. 2, p. 591–646, May 2009.

CLIFFORD, P.; SUDBURY, A. The potts model. *Biometrika*, v. 60, n. 3, p. 581–588, 1973.

DALL, J.; CHRISTENSEN, M. Random geometric graphs. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 66, n. 1, p. 016121, Jul 2002.

DEZAN, A. *Falta d'água decorrente do apagão deixa quase 1.800 alunos sem aula no Rio*. 2009. Disponível em: <<http://ultimosegundo.ig.com.br/brasil/2009/11/11/falta+dagua+decorrente+do+apagao+deixa+quase+1800+alunos+sem+aula+no+rio+9066001.html>>.

DOBSON, I.; CARRERAS, B.; LYNCH, V.; NEWMAN, D. An initial model for complex dynamics in electric power system blackouts. *Hawaii International Conference on System Sciences*, IEEE Computer Society, Los Alamitos, CA, USA, v. 2, p. 2017, 2001. ISSN 1530-1605.

DORLAS, T. C. *Statistical Mechanics: Fundamentals and Model Solutions*. 1st. ed. [S.I.]: Taylor & Francis, 1999. ISBN 0750305401.

DURRETT, R. *Random Graph Dynamics (Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics)*. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2006. ISBN 0521866561.

ERDOS, P.; RÉNYI, A. On random graphs. I. *Publ. Math. Debrecen*, v. 6, p. 290–297, 1959.

ERDOS, P.; RENYI, A. On the evolution of random graphs. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci*, v. 5, p. 17–61, 1960.

FELLER, W. On a general class of contagious distributions. *The Annals of Mathematical Statistics*, v. 14, n. 4, p. 389–400, 1943. ISSN 0003-4851. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1214/aoms/1177731359>>.

G1. *Mais de 36 horas após apagão, milhares continuam sem água no Rio e em SP*. 2009. Disponível em: <<http://g1.globo.com/Sites/Especiais/Noticias/0,,MUL1376394-17814,00.html>>.

GALAM, S. Majority rule, hierarchical structures, and democratic totalitarianism: A statistical approach. *Journal of Mathematical Psychology*, v. 30, n. 4, p. 426 – 434, 1986. ISSN 0022-2496. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/B6WK3-4DT5NYT-3V/2/d1d6b8719b98a655e3715796ab2b415b>>.

GALAM, S.; GEFEN, Y.; SHAPIR, Y. Sociophysics: a new approach of sociological collective behavior. i. mean-behavior description of a strike. *J. of Math. Sociology*, v. 9, p. 1–13, 1982.

GARDINER, C. W. *Handbook of stochastic methods : for physics, chemistry and the natural sciences*. Springer, 1985. Paperback. (Springer series in synergetics, 13). ISBN 3540616349. Disponível em: <<http://www.worldcat.org/isbn/3540616349>>.

GLAUBER, R. J. Time-dependent statistics of the ising model. *Journal of Mathematical Physics*, AIP, v. 4, n. 2, p. 294–307, 1963.

GRINSTEIN, G.; JAYAPRAKASH, C.; HE, Y. Statistical mechanics of probabilistic cellular automata. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 55, n. 23, p. 2527–2530, Dec 1985.

KAUFFMAN, S. A. *The Origins of Order: Self-Organization and Selection in Evolution*. 1. ed. [S.I.]: Oxford University Press, USA, 1993. Paperback. ISBN 0195079515.

KOSTEREV, D.; TAYLOR, C.; MITTELSTADT, W. Model validation for the august 10, 1996 wsc system outage. *Power Systems, IEEE Transactions on*, v. 14, n. 3, p. 967 –979, aug 1999. ISSN 0885-8950.

LILIJEROS, F.; EDLING, C.; AMARAL, L.; STANLEY, E.; ÅBERG, Y. The web of human sexual contacts. *Nature*, v. 411, p. 907–908, 2001.

MAGALHAES, M. N. *Probabilidade e Variáveis Aleatórias*. 2st. ed. [S.I.]: Edusp, 2006. ISBN 8531409454.

MELO, D. F. F. de. *Modelo do voto da maioria com três estados em grafos aleatórios*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, 50732-970, Recife-PE, Brazil, Abril 2010.

- NEWMAN, J. R. *The World of Mathematics*. [S.l.]: Simon and Schuster, New York, 1956. Paperback. ISBN 0486432688.
- NEWMAN, M. E. J. Spread of epidemic disease on networks. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 66, n. 1, p. 016128, Jul 2002.
- NEWMAN, M. E. J.; STROGATZ, S. H.; WATTS, D. J. Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 64, n. 2, p. 026118, Jul 2001.
- OLIVEIRA, M. J. de. Isotropic majority-vote model on a square lattice. *Journal of Statistical Physics*, Springer Netherlands, v. 66, p. 273–281, 1992. ISSN 0022-4715. 10.1007/BF01060069. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF01060069>>.
- ONLINE, F. *Apagão deixa áreas de três Estados sem água; problema afeta 2,5 milhões em SP*. 2009. Disponível em: <http://www.primeiraedicao.com.br/?pag=brasil_mundo&cod=6509>.
- ONSAGER, L. Crystal statistics. i. a two-dimensional model with an order-disorder transition. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 65, n. 3-4, p. 117–149, Feb 1944.
- PE360GRAUS.COM. *Apagão foi provocado por raios, chuva e vento fortes, diz Lobão*. 2009. Disponível em: <<http://pe360graus.globo.com/noticias/cidades/energia/2009/11/11/NWS,502055,4,254,NOTICIAS,766-APAGAO-PROVOCADO-RAIOS-CHUVA-VENTO-FORTES-DIZ-LOBAO.aspx>>.
- PEREIRA, L. F. C. *Diagrama de Fases e Expoentes Críticos do Modelo do Voto da Maioria em Grafos Aleatórios*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, 50732-970, Recife-PE, Brazil, Março 2005.
- PEREIRA, L. F. C.; MOREIRA, F. G. B. Majority-vote model on random graphs. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 71, n. 1, p. 016123, Jan 2005.
- PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T.; FLANNERY, B. P. *Numerical recipes in C (2nd ed.): the art of scientific computing*. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 1992. ISBN 0-521-43108-5.
- RUSSELL, S. J.; NORVIG, P. *Artificial Intelligence: A Modern Approach*. [S.l.]: Pearson Education, 2003. ISBN 0137903952.
- SANTOS, M.; TEIXEIRA, S. Anisotropic voter model. *Journal of Statistical Physics*, Springer Netherlands, v. 78, p. 963–970, 1995. ISSN 0022-4715. 10.1007/BF02183696. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF02183696>>.
- SCHNATTER, F. S. *Finite mixture and Markov switching models*. 1st. ed. [S.l.]: Springer Verlag, 2006. ISBN 0387329099.
- STANLEY, E. H. *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*. [S.l.]: Oxford University Press, USA, 1971. Paperback. ISBN 0195053168.
- TERRA, R. ao. *Metrô e trens da CPTM voltam a operar na manhã de quarta em SP*. 2009. Disponível em: <<http://noticias.terra.com.br/brasil/apagao/interna/0,,OI4094378-EI14461,00-Metro+e+trens+da+CPTM+voltam+a+operar+na+manha+de+em+SP.html>>.

TOMÉ, T.; OLIVEIRA, M. J. de. *Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade*. 1st. ed. [S.l.]: Edusp, 2001. ISBN 8531405955.

TOME, T.; OLIVEIRA, M. J. de; SANTOS, M. A. Non-equilibrium ising model with competing glauber dynamics. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 24, n. 15, p. 3677, 1991. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0305-4470/24/i=15/a=033>>.

WATTS, D. J. *Six Degrees: The Science of a Connected Age*. 1st. ed. [S.l.]: W. W. Norton & Company, 2003. Hardcover. ISBN 0393041425.

WATTS, D. J.; STROGATZ, S. H. Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 393, n. 6684, p. 440–442, June 1998. ISSN 0028-0836. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/30918>>.

WEST, D. B. *Introduction to Graph Theory (2nd Edition)*. [S.l.]: Prentice Hall, 2000. Hardcover.

WU, F. Y. The potts model. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 54, n. 1, p. 235–268, Jan 1982.

YEOMANS, J. M. *Statistical Mechanics of Phase Transitions*. 1st. ed. [S.l.]: Oxford University Press, 1992. ISBN 019851729.

Todas as simulações desenvolvidas para a realização deste trabalho foram escritas nas linguagens de programação C++ e MPI. Os compiladores utilizados foram o GNU GCC - gcc/g++ (www.gnu.org/software/gcc) e o MPICH2 (<http://www.mcs.anl.gov/research/projects/mpich2/>).

As simulações foram realizadas nos sistemas operacionais de código aberto Ubuntu (<http://www.ubuntu.com/>).

Todos os gráficos contendo resultados de simulações foram feitos no software de código aberto QtiPlot (<http://soft.proindependent.com/qtiplot.html>).

Este texto foi tipografado em LATEX utilizando a classe ABNT na classe abnTeX (<http://abntex.codigolivre.org.br/>).