



Universidade Federal Rural de Pernambuco  
Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística aplicada

# **Novos critérios de Estimação e Bondade de ajuste baseados na Transformada de Mellin para o modelo $q$ -Weibull**

**Marília Gabriela Ferreira de Miranda Oliveira**

**Recife - PE, 25 de Fevereiro de 2021**

Marília Gabriela Ferreira de Miranda Oliveira

**Novos critérios de Estimação e Bondade de ajuste  
baseados na Transformada de Mellin para o modelo  
 $q$ -Weibull**

**Dissertação de Mestrado** apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada da UFRPE, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Mestre em Biometria e Estatística Aplicada.

Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE  
Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada

Orientador: Dr. Frank Sinatra Gomes da Silva  
Coorientador: Dr. Josimar Mendes de Vasconcelos

Recife - PE  
25 de Fevereiro de 2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal Rural de Pernambuco  
Sistema Integrado de Bibliotecas  
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- O48n Oliveira, Marília Gabriela Ferreira de Miranda  
Novos critérios de Estimação e Bondade de ajuste baseados na Transformada de Mellin para o modelo q-Weibull /  
Marília Gabriela Ferreira de Miranda Oliveira. - 2021.  
51 f. : il.
- Orientador: Frank Sinatra Gomes da Silva.  
Coorientador: Josimar Mendes de Vasconcelos.  
Inclui referências e apêndice(s).
- Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Biometria e  
Estatística Aplicada, Recife, 2021.
1. Modelo q-Weibull. 2. Transformada de Mellin. 3. Medidas de bondade de ajuste. I. Silva, Frank Sinatra Gomes  
da, orient. II. Vasconcelos, Josimar Mendes de, coorient. III. Título

CDD 519.5

---

Marília Gabriela Ferreira de Miranda Oliveira

**Novos critérios de Estimação e Bondade de ajuste  
baseados na Transformada de Mellin para o modelo  
 $q$ -Weibull**

**Dissertação de Mestrado** apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada da UFRPE, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Mestre em Biometria e Estatística Aplicada.

Trabalho aprovado. Recife - PE, 25 de Fevereiro de 2021:

---

**Dr. Frank Sinatra Gomes da Silva**  
Orientador

---

**Dr. Josimar Mendes de Vasconcelos**  
Coorientador

---

**Dr. Abraão D. C. Nascimento**  
Convidado 1

Recife - PE  
25 de Fevereiro de 2021

# Agradecimentos

Porque Dele, por Ele e para Ele são todas as coisas. Gratidão sempre à Deus por me permitir chegar a lugares tão altos e por me sustentar nos momentos mais difíceis da caminhada, cumprindo sempre os planos Dele para mim.

Agradeço aos meus pais, Maria Luci, Gilberto Beserra e Luciana por me mostrarem que o conhecimento é um bem que ninguém tira de você e por proporcionarem sempre uma rede de apoio forte para que eu possa estudar e realizar os meus sonhos. Aos meus queridos irmãos, Gustavo e Augusto, minha gratidão por me incentivarem, acreditarem em mim e viverem todos os meus sonhos junto comigo. Gratidão à Cristovão e Laila por se fazerem tão presentes nessa caminhada, sempre com muito apoio e compreensão.

Aos meus amigos de longas datas, por proporcionarem momentos de muita diversão e de conversas sempre positivas e por toda torcida pelo meu sucesso. Em especial, Geisy, Edvaldo, Gregory, Romário, Henrique e Vaniele por toda a preocupação e por compartilharem comigo o dia-a-dia, tornando a caminhada mais leve e feliz.

Aos meus amigos da Residência: Mikaelly, Marília, Avishek, Emanuel e Adnaide, por se tornarem uma família pra mim durante a minha estadia em Recife. Ao meu Tio Joseval e prima Mirella, por sempre se preocuparem e estarem presentes, meu muito obrigado!

À todos os meus professores do CNSBC, IFAL, UPE e UFRPE, em especial, Maurício Goldfarb, Felipe Barreto e Elizângelo Lopes por nunca medirem esforços para me ajudar durante a graduação com as atividades acadêmicas, como também por toda lição de vida. Obrigado por acreditarem em mim quando nem eu acreditei e por me trazerem até aqui.

Aos meus queridos orientadores, Dr. Frank e Dr. Josimar por tamanha competência, dedicação, esforço, que apesar da pandemia, conseguiram fazer um acompanhamento excepcional sempre regado de muita compreensão e companheirismo.

À banca examinadora por disponibilizar de tempo e dedicação a leitura deste trabalho como forma de melhorar a minha formação acadêmica.

Gratidão ao PPGBEA, UFRPE e todos os amigos que fiz no departamento pela oportunidade de crescimento, troca de conhecimento e companheirismo durante a jornada do mestrado.

*“O seu amor por mim, me fez chegar aqui  
Mesmo tão cansado, desprezado, desprezível  
Me faz estar de pé, rompendo pela fé  
Seu amor me leva a pastos verdes onde eu posso descansar.”*

# Resumo

Atualmente, a quantidade de dados e informações sobre fenômenos naturais tem crescido cada vez mais rápido devido ao uso de tecnologias. Esses fenômenos podem ser descritos e explicados através de modelos de probabilidade. Nos últimos anos, foram propostos vários modelos de probabilidade mais flexíveis para descrever dados em Análise de Sobrevivência. Dentre os modelos propostos na literatura, destacam-se as  $q$ -distribuições (particularmente a  $q$ -Weibull) por apresentar eficiência em descrever e explicar dados dessa natureza. Apesar do crescente número de trabalhos que tratam sobre novos modelos ou classes de distribuições, há uma lacuna quanto a proposta de métodos de inferência e propostas de novos métodos de medidas de bondade de ajuste. Tomando a metodologia proposta por Nicolas e Anfinson (2002) que utiliza a Transformada de Mellin, temos como objetivo propor um novo método de estimação independente da função de verossimilhança e medida de bondade de ajuste considerando aspectos qualitativos e quantitativos. Num aspecto numérico, inicialmente realizou-se uma simulação de Monte Carlo afim de comparar o método de estimação proposto com métodos de estimação já consolidados, baseados em momentos (MM) e de máxima verossimilhança (MMV), em que observamos que o MM e o método proposto obtiveram os melhores resultados. Por fim, aplicou-se dois bancos de dados para verificar o desempenho dos estimadores em relação a medida de bondade de ajuste quantitativa. Os resultados sugerem que o MM e o método proposto possuem um desempenho similar para a estatística de teste.

**Palavra-chaves:** Modelo  $q$ -Weibull, Transformada de Mellin; Medidas de bondade de ajuste.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Gráfico da fdp $q$ -Weibull para $\alpha = 2$ e $\lambda = 1$ . . . . .	6
Figura 2 – Gráfico da fdp $q$ -Weibull para $\alpha = 8$ e $\lambda = 0, 2$ . . . . .	7
Figura 3 – Gráfico da fdp $q$ -Weibull para $\alpha = 4$ e $\lambda = 0, 1$ . . . . .	7
Figura 4 – Gráfico da fdp $q$ -Weibull para $\alpha = 8$ e $\lambda = 0, 1$ . . . . .	8
Figura 5 – Gráfico da fda $q$ -Weibull para $\alpha = 2$ e $\lambda = 0, 1$ . . . . .	9
Figura 6 – Gráfico da fda $q$ -Weibull para $\alpha = 2$ e $\lambda = 0, 1$ . . . . .	10
Figura 7 – Diagrama $(\tilde{k}_3, \tilde{k}_2)$ para os modelos $q$ -Weibull. . . . .	18
Figura 8 – REQM para os três métodos de estimação para o caso $1 < q < 2$ . . . . .	24
Figura 9 – REQM para os três métodos de estimação para o caso $q < 1$ . . . . .	25
Figura 10 – Diagrama de LCs mostrando a variedade dos LCs teóricos para o modelo $q$ -Weibull, bem como uma coleção de LCs representando os dados de rastreamento e aerotransportados. . . . .	26
Figura 11 – Elipses de confiança para o caso $1 < q < 2$ e $q < 1$ , respectivamente . . . . .	27



# Lista de tabelas

Tabela 1 – Transformada de Mellin para o modelo $q$ -Weibull . . . . .	14
Tabela 2 – Log-cumulantes para o modelo $q$ -Weibull $1 < q < 2$ . . . . .	15
Tabela 3 – Log-cumulantes para o modelo $q$ -Weibull $q < 1$ . . . . .	16
Tabela 4 – Viés absoluto para o caso $1 < q < 2$ . . . . .	23
Tabela 5 – Viés absoluto para o caso $q < 1$ . . . . .	24
Tabela 6 – Estatística descritiva dos dados . . . . .	25
Tabela 7 – Estatística $T^2$ de Hotelling e p-valor para o primeiro caso do modelo $q$ -Weibull. . . . .	27
Tabela 8 – Estatística $T^2$ de Hotelling e p-valor para o segundo caso do modelo $q$ -Weibull. . . . .	27

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>OBJETIVOS</b>	<b>4</b>
2.1	Objetivo Geral	4
2.2	Objetivos Específicos	4
<b>3</b>	<b>DISTRIBUIÇÃO Q-WEIBULL</b>	<b>5</b>
3.1	Distribuição $q$ -Weibull análoga	6
3.2	Fda para distribuição $q$ -Weibull Análoga	8
3.3	Estimação de Máxima Verossimilhança	10
3.3.1	Estimação pelo Método dos Momentos	11
3.4	Distribuição $q$ -Weibull: Contribuição	12
3.4.1	Função Característica	12
3.5	Transformada de Mellin	13
3.6	Método dos log-cumulantes	14
3.7	Diagrama de Log-cumulantes	15
3.8	Método de estimação por LCs	16
3.9	Novas ferramentas de qualidade de ajuste para modelos $q$ -Weibull	17
3.10	Estatística $T^2$ de Hotelling	18
3.11	Estatística $T^2$ de Hotelling e Log-cumulantes	19
<b>4</b>	<b>RESULTADOS NUMÉRICOS</b>	<b>22</b>
4.1	Estudo de simulação	22
4.2	Aplicação a dados reais	25
4.2.1	Conjunto de dados selecionados e estatísticas descritivas	25
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>28</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>29</b>
	<b>APÊNDICE A – PRIMEIRO APÊNDICE</b>	<b>33</b>
	<b>APÊNDICE B – SEGUNDO APÊNDICE</b>	<b>36</b>
	<b>APÊNDICE C – TERCEIRO APÊNDICE</b>	<b>40</b>

# 1 Introdução

Atualmente, a quantidade de dados e informações sobre fenômenos naturais tem crescido cada vez mais rápido devido ao uso de tecnologias. Esses fenômenos podem ser descritos e explicados através de métodos científicos, como os modelos de probabilidade. Para Brito (2014), um modelo de probabilidade é uma formulação matemática que se ajusta a um conjunto de dados a fim de representar, analisar e realizar previsões.

Desta forma, dada uma amostra de uma população de um fenômeno natural, pode-se avaliar se um modelo de probabilidade se ajusta aos dados através de testes de aderência. Os testes de aderência permitem determinar se os dados de uma amostra são modelados ou não por um modelo de probabilidade pré-determinado. Após a seleção do modelo de probabilidade, podemos estimar os seus parâmetros, a fim de realizar inferências que possibilitam obter informações importantes do fenômeno. Essas informações facilitam a tomada de decisão referente a um problema real. Um exemplo de inferência seria a previsão da duração média da vida útil de um smartphone (com base no desempenho de uma amostra desses aparelhos).

Com isso, citaremos alguns trabalhos na literatura que se preocupam com a geração de novos modelos, como a Classe Marshall Olkin por Marshall e Olkin (1997); a distribuição gama Generalizada (ZOGRAFOS; BALAKRISHNAN, 2009); Classe Kumaraswamy (CORDEIRO; CASTRO, 2011); Classe T-X (ALZAATREH; LEE; FAMOYE, 2013); Método gerador de classes proposta por Brito et al. (2019) e a classe Normal-G por Silveira et al. (2019). No entanto, esses modelos de probabilidade muitas vezes não conseguem se ajustar de forma satisfatória a todos os fenômenos e áreas existentes.

Em particular, há uma grande quantidade de modelos aplicados na área de confiabilidade e análise de sobrevivência. De acordo com Assis (2013), alguns desses modelos podem ser vistos como modificações de distribuições já conhecidas, bem como combinações de distribuições, objetivando explicar diversos fenômenos da natureza.

Desta forma, além dos modelos citados anteriormente, Tsallis e Statis (1991) realizaram uma generalização de entropia de Boltzmann-Gibbs-Shannon, desenvolvendo uma nova equação para o cálculo de entropia, "por meio do índice entrópico  $q$ " (SILVA, 2016, p. 13). De acordo com Jr et al. (2009), as distribuições que surgem dessa formalização são chamadas  $q$ -distribuições. Do ponto de vista da máxima entropia, as  $q$ -distribuições surgem para otimizar entropias generalizadas, como a de Tsallis. A exemplo dessas  $q$ -distribuições, temos a  $q$ -Gaussiana,  $q$ -Exponencial e a  $q$ -Weibull.

Considerando a distribuição  $q$ -Weibull, temos que alguns estudos mostraram a eficiência dessa distribuição em Análise de Sobrevivência, Jr, Mendes e Malacarne (2003)

utilizaram a  $q$ -Weibull para modelagem de dados de vítimas de ciclone tropical. Esses estudos mostram que a distribuição  $q$ -Weibull é um modelo apropriado para modelar dados dessa natureza. [Jose e Naik \(2009\)](#) mostraram que a distribuição  $q$ -Weibull oferece uma melhor modelagem à dados de sobrevivência de pacientes com câncer de bexiga; [Sartori et al. \(2009\)](#) apontaram que a distribuição  $q$ -Weibull se ajusta melhor para descrever a taxa de falha de uma unidade de compressão em uma planta típica de recuperação de gás natural e [Assis et al. \(2015\)](#) mostraram que a distribuição supracitada pode ser útil para profissionais de análise de confiabilidade.

Ainda, [Assis \(2013\)](#) mostra que a distribuição  $q$ -Weibull não possui todos os momentos para os valores de  $q$ , optaremos trabalhar com a distribuição  $q$ -Weibull análoga, proposta por [Jose e Naik \(2009\)](#) através de um caso especial do modelo geral de probabilidade introduzido por [Mathai \(2005\)](#).

Então, pela perspectiva de análise dos dados, temos que os dados relacionados a análise de sobrevivência impõem algumas dificuldades, como por exemplo, dados de natureza censurada resultantes de distribuições com caudas pesadas e comportamento assimétrico. Neste sentido, requerem propostas alternativas de métodos de inferência.

Apesar da existência de vários trabalhos que se prestam a propor novas classes de distribuições probabilísticas, poucos estudos se propõem em abordar métodos alternativos de inferência, bem como medidas de bondade de ajuste. Como exemplo de inferência, podemos citar uma extensão da Weibull a partir da Classe Marshall Olkin, em que [Hirose \(2002\)](#) aplicou esse modelo a dados de sobrevivência e utilizou estimativas de máxima verossimilhança.

Ademais, se tratando de medidas de bondade de ajuste, na literatura existem poucos trabalhos que permitem a avaliação desses modelos. As medidas de bondade de ajuste são métricas quantitativas que informam o quão bem um modelo está ajustado aos dados. Alguns trabalhos propuseram medidas de bondade de ajuste para modelos de probabilidade, como: [Pearson \(1895\)](#); [McQuarrie e Tsai \(1998\)](#) e [Pakyari e Balakrishnan \(2012\)](#).

[Pearson \(1895\)](#), propôs a utilização do diagrama de Pearson que tem como base medidas de assimetria e curtose. No entanto, [Nicolas \(2005\)](#) mostrou que o método de Pearson apresenta uma solução analítica difícil e não se adequa a variáveis aleatórias positivas. [McQuarrie e Tsai \(1998\)](#) propuseram o critério de informação Akaike (AIC) que busca o melhor modelo com base na função de verossimilhança. Porém, essa medida não é eficaz para modelos não encaixados (modelos obtidos a partir de outro), além de não possibilitar a realização de um teste de hipótese. Já [Pakyari e Balakrishnan \(2012\)](#) propuseram uma medida de bondade de ajuste baseada na distância entre função distribuição acumulada (fda) e a função de distribuição empírica, sendo uma medida limitada, pois nem sempre possui solução analítica.

Entretanto, [Nicolas e Anfinen \(2002\)](#) propõem uma nova metodologia baseada na Transformada de Mellin para dados de imagens PolSAR (Polarimetric Synthetic Aperture Radar) (diagrama de log-cumulantes), sendo melhor do que o diagrama de Pearson, pois se adequa a variáveis aleatórias positivas, além de simples implementação computacional.

Neste sentido, visando analisar dados de sobrevivência utilizando a distribuição  $q$ -Weibull, que possui dois casos (mostrados na seção de metodologia), pretendemos propor um método de estimativa baseado na Transformada de Mellin, e compará-lo com métodos já existentes, como o método dos momentos e método da máxima verossimilhança. Também, pretendemos derivar medidas de bondade de ajuste considerando aspectos qualitativos e quantitativos para o modelo  $q$ -Weibull.

Para tanto, no segundo capítulo temos nossos objetivos; terceiro capítulo a revisão de literatura; quarto capítulo, os resultados numéricos e aplicações e no quinto capítulo, a conclusão.

## 2 Objetivos

Para o cumprimento da questão de pesquisa, delineamos o objetivo geral e uma sequência de objetivos específicos.

### 2.1 Objetivo Geral

Propor um critério de estimação independente da função de verossimilhança e medidas de bondade de ajuste considerando aspectos qualitativos e quantitativos.

### 2.2 Objetivos Específicos

- Desenvolver a função característica para o modelo q-Weibull;
- Calcular a Transformada de Mellin;
- Desenvolver os log-cumulantes do segundo tipo;
- Construir o estimadores baseados nos log-cumulantes do segundo tipo;
- Construir diagrama de log-cumulantes;
- Elaborar a estatística de teste;
- Realizar simulações de Monte Carlo;
- Aplicar bancos de dados em Análise de Sobrevida.

### 3 Distribuição q-Weibull

[Mathai \(2005\)](#) introduziu um modelo geral de probabilidade matricial-variável que a depender das restrições dos parâmetros retorna alguns dos modelos mais utilizados na Análise Multivariada. O parâmetro de caminho  $q$  introduzido, segundo [Mathai e Haubold \(2007\)](#), permite que o modelo passe de um modelo beta generalizado tipo I para um modelo beta generalizado tipo II.

Esse modelo geral, nos possibilita, a partir do parâmetro  $q$  que tenhamos três casos citados por [Jose e Naik \(2009\)](#) que serão abordados a seguir:

Seja  $f_1(x)$  uma função densidade de probabilidade (fdp) com parâmetros escalares, com  $a > 0$ ,  $\beta > 0$ . Quando  $q > 1$ , temos:

$$f_1(x) = c_1 |x|^{\alpha-1} [1 + a(q-1)|x|^\delta]^{-\frac{\beta}{q-1}}; \quad (3.1)$$

$$-\infty < x < \infty, \delta > 0, q > 1.$$

Em que  $c_1$  é uma constante de normalização dada por:

$$c_1 = \frac{\delta [a(q-1)]^{\frac{\alpha}{\delta}} \Gamma(\frac{\beta}{q-1})}{2\Gamma(\frac{\alpha}{\delta}) \Gamma(\frac{\beta}{q-1} - \frac{\alpha}{\beta})}, \frac{\beta}{q-1} > \frac{\alpha}{\beta}.$$

Para  $q < 1$ , a função  $f_1(x)$  pode ser escrita como:

$$f_2(x) = c_2 |x|^{\alpha-1} [1 - a(q-1)|x|^\delta]^{\frac{\beta}{1-q}};$$

em que  $q < 1$ ,  $a > 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\delta > 0$ , e  $1 - a(q-1)|x|^\delta > 0$ . Também, temos que  $c_2$  é dado por:

$$c_2 = \frac{\delta [a(1-q)]^{\frac{\alpha}{\delta}} \Gamma(\frac{\beta}{1-q} + \frac{\alpha}{\delta} + 1)}{2\Gamma(\frac{\alpha}{\delta}) \Gamma(\frac{\beta}{1-q} + 1)}.$$

Quando  $q = 1$ ,  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  retoma a distribuição Weibull, dada por:

$$f_3(x) = \frac{\delta (\alpha\beta)^{\frac{\alpha}{\beta}}}{2\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})} |x|^{\alpha-1} \exp(-\alpha\beta|x|^\delta); -\infty < x < \infty; a, \alpha, \beta, \delta > 0.$$

### 3.1 Distribuição $q$ -Weibull análoga

Jose e Naik (2009) introduziram a distribuição  $q$ -Weibull análoga, tomando os parâmetros  $\delta = \alpha$ ,  $\beta = 1$ ,  $a = \lambda^\alpha$  em (3.1). Desta forma,  $f_1(x)$  para  $q > 1$  pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
 f_4(x) &= \frac{\alpha \lambda^\alpha (q-1) \Gamma(\frac{1}{q-1})}{\Gamma(\frac{1}{q-1} - 1)} x^{\alpha-1} [1 + (q-1)(\lambda x)^\alpha]^{-\frac{1}{q-1}} \\
 &= \frac{\alpha \lambda^\alpha (q-1) (\frac{1}{q-1} - 1)!}{(\frac{1}{q-1} - 2)!} x^{\alpha-1} [1 + (q-1)(\lambda x)^\alpha]^{-\frac{1}{q-1}} \\
 &= \frac{\alpha \lambda^\alpha (q-1) (\frac{1}{q-1} - 1) (\frac{1}{q-1} - 2)!}{(\frac{1}{q-1} - 2)!} x^{\alpha-1} [1 + (q-1)(\lambda x)^\alpha]^{-\frac{1}{q-1}} \\
 &= \alpha \lambda^\alpha (q-1) \left( \frac{1}{q-1} - 1 \right) x^{\alpha-1} [1 + (q-1)(\lambda x)^\alpha]^{-\frac{1}{q-1}} \\
 &= \alpha \lambda^\alpha (2-q) x^{\alpha-1} [1 + (q-1)(\lambda x)^\alpha]^{-\frac{1}{q-1}}, \tag{3.2}
 \end{aligned}$$

em que  $x > 0$ ,  $\alpha, \lambda > 0$  e  $1 < q < 2$ .

O comportamento da fdp pode ser visto na Figura 1 para valores preestabelecidos de  $\alpha$  e  $\lambda$  à medida em que variamos  $q$  entre 1 e 2. Tomando  $\alpha = 2$  e  $\lambda = 1$  obtemos curvas assimétricas e com caldas mais grossas.

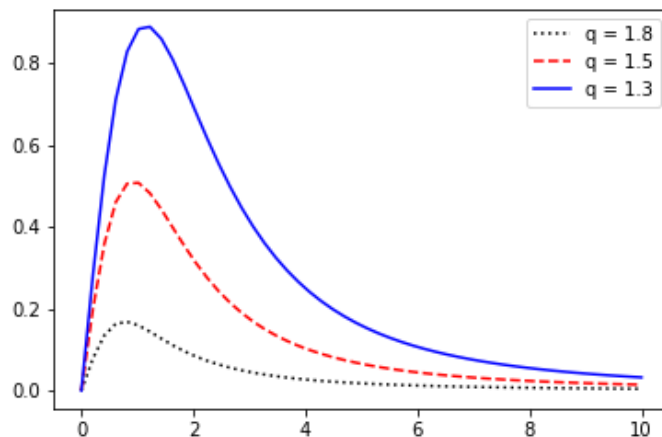


Figura 1 – Gráfico da fdp  $q$ -Weibull para  $\alpha = 2$  e  $\lambda = 1$ .

Na Figura 2 temos a mesma variação para o parâmetro  $q$  e valores diferentes de  $\alpha$  e  $\lambda$ . Aumentado o valor de  $\alpha$  para 8 e diminuindo  $\lambda$  para 0,2, temos curvas “mais simétricas” e com caldas “mais finas”.



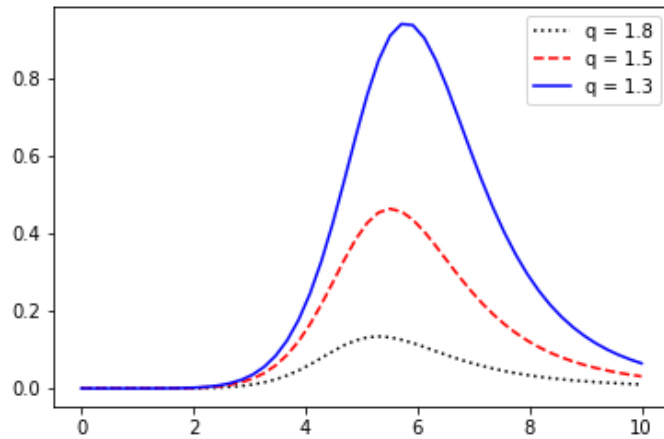


Figura 2 – Gráfico da fdp q-Weibull para  $\alpha = 8$  e  $\lambda = 0, 2$ .

Agora, se considerarmos  $q < 1$ , a fdp  $f_2(x)$  pode ser escrita, análogamente a  $f_4(x)$ , conforme (JOSE; NAIK, 2009):

$$f_5(x) = \alpha \lambda^\alpha (2 - q) x^{\alpha-1} [1 - (1 - q)(\lambda x)^\alpha]^{-\frac{1}{1-q}}, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{\lambda(1 - q)^{1/\alpha}}. \quad (3.3)$$

em que  $\alpha, \lambda > 0$ .

O comportamento da fdp  $f_5(x)$  pode ser observado na Figura 3 com os parâmetros  $\alpha = 4$ ,  $\lambda = 0, 1$  e  $q < 1$ , mostrando curvas com caldas mais grossas.

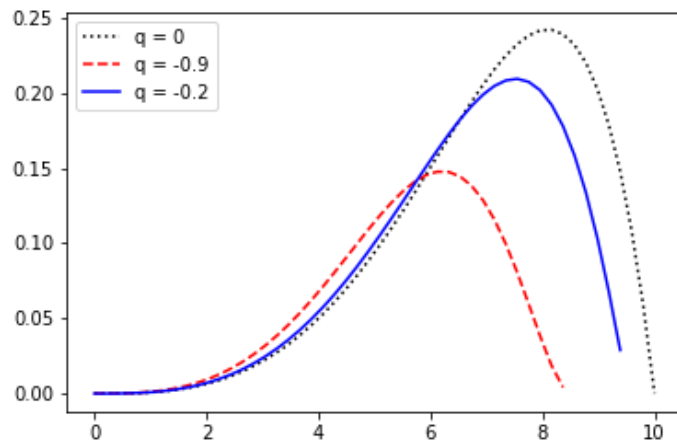


Figura 3 – Gráfico da fdp q-Weibull para  $\alpha = 4$  e  $\lambda = 0, 1$ .

Mudando os valores dos parâmetros  $\alpha$  e  $\lambda$  para 8 e 0, 1 respectivamente, e mantendo a mesma variação para  $q$ , obteremos curvas com caldas mais finas, como observado na Figura 4.

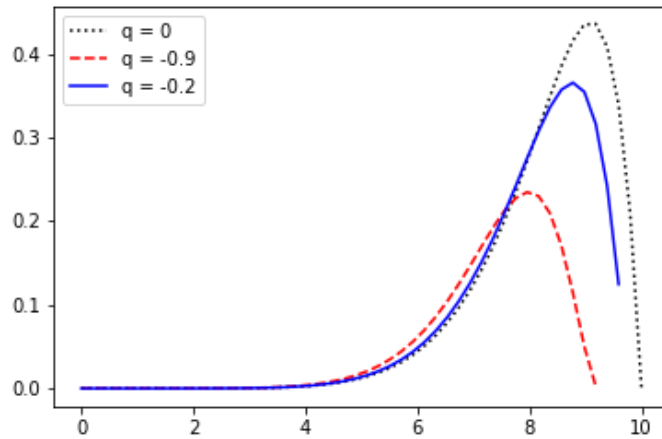


Figura 4 – Gráfico da fdp  $q$ -Weibull para  $\alpha = 8$  e  $\lambda = 0, 1$ .

### 3.2 Fda para distribuição $q$ -Weibull Análoga

A partir da derivada de (3.2), obtemos a fda para o caso  $1 < q < 2$

$$F_4(x) = \alpha \lambda^\alpha (2 - q) \int_0^x x^{\alpha-1} [1 + (q - 1)(\lambda x)^\alpha]^{-\frac{1}{q-1}} dx. \quad (3.4)$$

Considerando a integração por substituição como sendo  $u = 1 + (q - 1)(\lambda x)^\alpha$ , temos que quando  $x = 0$ , então  $u = 1$ , e também, quando  $x = x$ ,  $u = 1 + (q - 1)(\lambda x)^\alpha = k$ :

$$\begin{aligned} F_4(x) &= \alpha \lambda^\alpha (2 - q) \int_1^k u^{-\frac{1}{q-1}} \frac{du}{(q - 1) \lambda^\alpha \alpha} \\ &= \frac{(2 - q)}{(q - 1)} \int_1^k u^{-\frac{1}{q-1}} du \\ &= \frac{(2 - q)}{(q - 1)} \left[ \frac{u^{-\frac{1}{q-1} + 1}}{-\frac{1}{q-1} + 1} \right]_1^k \\ &= \frac{(2 - q)}{(q - 1)} \frac{(q - 1)}{(2 - q)} \left[ u^{\frac{q-2}{q-1}} \right]_1^k \\ &= -[1 + (q - 1)(\lambda x)^\alpha]^{\frac{q-2}{q-1}} + 1 \\ &= 1 - [1 + (q - 1)(\lambda x)^\alpha]^{\frac{q-2}{q-1}}. \end{aligned}$$

Na Figura 5 temos o gráfico do comportamento da fda com os parâmetros  $\alpha = 2$ ,  $\lambda = 0, 1$  e  $1 < q < 2$ .

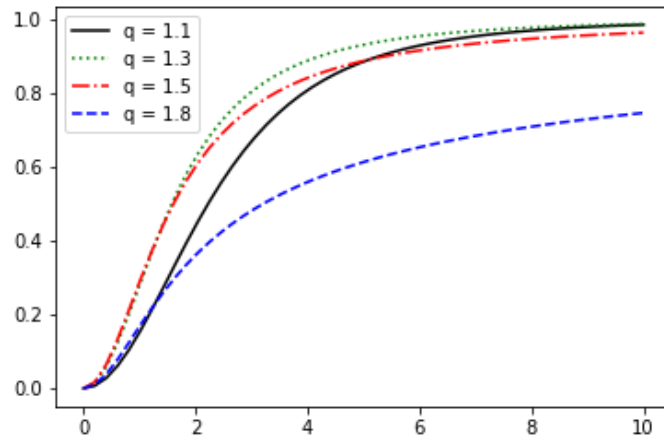


Figura 5 – Gráfico da fda  $q$ -Weibull para  $\alpha = 2$  e  $\lambda = 0,1$ .

Agora, considerando o caso do modelo  $q$ -Weibull quando  $q < 1$ , a fda pode ser encontrada analogamente à Equação (3.4), e portanto, temos:

$$F_5(x) = \alpha \lambda^\alpha (2 - q) \int_0^x x^{\alpha-1} [1 - (1 - q)(\lambda x)^\alpha]^{\frac{1}{1-q}} dx.$$

Sendo a substituição  $u = 1 - (1 - q)(\lambda x)^\alpha$ , temos que quando  $x = 0$  então  $u = 1$ , e também, quando  $x = x$ ,  $u = 1 - (1 - q)(\lambda x)^\alpha = k$ . Logo,

$$\begin{aligned} F_5(x) &= \alpha \lambda^\alpha (2 - q) \int_1^k u^{\frac{1}{1-q}} \frac{du}{-(1 - q)\lambda^\alpha \alpha} \\ &= \frac{(2 - q)}{-(1 - q)} \int_1^k u^{\frac{1}{1-q}} du \\ &= \frac{(2 - q)(q - 1)}{(q - 1)(2 - q)} \left[ u^{\frac{q-2}{q-1}} \right]_1^k \\ &= 1 - [1 - (1 - q)(\lambda x)^\alpha]^{\frac{2-q}{1-q}}. \end{aligned}$$

O comportamento da fda do modelo  $q$ -Weibull para  $q < 1$  é mostrado na Figura 6, em que os parâmetros  $\alpha$  e  $\lambda$  são mantidos, porém, variamos  $q$  de forma que seja menor do que 1.

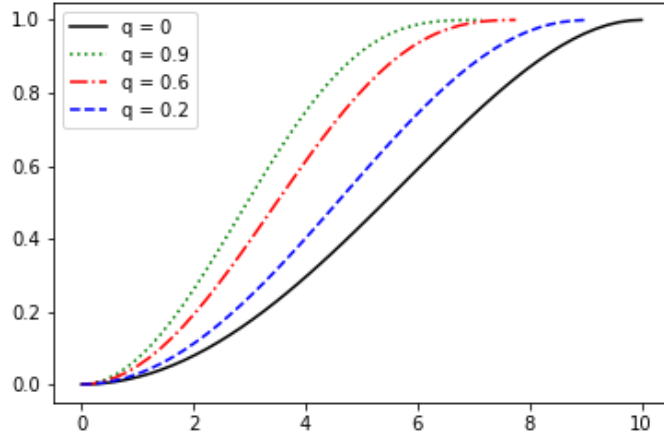


Figura 6 – Gráfico da fda  $q$ -Weibull para  $\alpha = 2$  e  $\lambda = 0, 1$ .

A partir de agora, por simplicidade, a distribuição obtida por meio das Equações (3.2) e (3.3) será chamada distribuição  $q$ -Weibull.

### 3.3 Estimação de Máxima Verossimilhança

Sejam  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  uma amostra aleatória obtida da distribuição  $q$ -Weibull ( $X \sim q$ -W), a função log-verossimilhança associada é dada por:

$$l(\boldsymbol{\theta}) = n \log(\alpha) + \alpha n \log(\lambda) + n \log(2 - q) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \log(x_i) + \zeta,$$

em que  $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \lambda, q)$  e  $\zeta = -\frac{1}{q-1} \sum_{i=1}^n \log[1 + (q-1)(x_i \lambda)^\alpha]$  ou  $\zeta = \frac{1}{1-q} \sum_{i=1}^n \log[1 - (1-q)(x_i \lambda)^\alpha]$  para o primeiro e segundo caso da  $q$ -Weibull, respectivamente.

Sendo  $\boldsymbol{\theta}$  o vetor composto pelos parâmetros da distribuição, as componentes do vetor escore, são:

$$U(\boldsymbol{\theta}) = (U_\alpha, U_\lambda, U_q) = \left( \frac{dl(\boldsymbol{\theta})}{d\alpha}, \frac{dl(\boldsymbol{\theta})}{d\lambda}, \frac{dl(\boldsymbol{\theta})}{dq} \right)^T, \quad (3.5)$$

em que as equações de (3.5) são dada por:

$$U_\alpha = \frac{n}{\alpha} + n \log(\lambda) + \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\alpha \lambda^\alpha (\log(x_i) + \log(\lambda))}{[1 + (q-1)x_i^\alpha \lambda^\alpha]},$$

$$U_\lambda = \frac{\alpha n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha x_i^\alpha \lambda^{\alpha-1}}{[1 + (q-1)x_i^\alpha \lambda^\alpha]}$$

e

$$U_q = -\frac{n}{(2-q)} + \sum_{i=1}^n \frac{\log(1 + (q-1)x_i^\alpha \lambda^\alpha)}{(q-1)^2} + \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\alpha \lambda^\alpha}{(q-1)[1 + (q-1)x_i^\alpha \lambda^\alpha]},$$

para o primeiro caso da distribuição  $q$ -Weibull. Para o segundo caso, o vetor escore é dado de forma análoga.

Desta forma, o estimador de máxima verossimilhança  $\hat{\theta}$  será definido como:

$$\hat{\theta} = \underset{\theta \in \mathbb{R}^n}{\text{arg max}} [l(\theta)], \quad (3.6)$$

em que a Equação (3.6) estima  $\hat{\theta}$  buscando o valor de  $\theta$  que maximiza a função  $l(\theta)$ . Em particular, é notório que os estimadores de máxima verossimilhança para o vetor de parâmetros da distribuição em estudo não possuem expressões em forma fechada, fazendo necessário o uso de métodos iterativos para encontrar as estimativas. Assim, utilizaremos o algoritmo BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) (NOCEDAL; STEPHEN, 1999) para encontrar a estimação dos parâmetros.

### 3.3.1 Estimação pelo Método dos Momentos

O método dos momentos (MM) de acordo com (BOLFARINE; SANDOVAL, 2001) é um dos métodos mais antigos e também um dos mais simples. Então, seja o  $r$ -ésimo momento amostral de uma amostra aleatória pertencente a distribuição  $q$ -Weibull, com  $r \geq 1$ :

$$m_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^r.$$

Seja também, o  $r$ -ésimo momento populacional ( $r \geq 1$ ):

$$\mu_r = E[X^r].$$

O método consiste em obter os estimadores para  $\theta = (\alpha, \lambda, q)$  igualando o  $r$ -ésimo momento populacional ao  $r$ -ésimo momento amostral

$$m_r = \mu_r.$$

Desta forma, considerando o primeiro caso da distribuição  $q$ -Weibull, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i &= \frac{(2-q)}{\lambda(q-1)^{\left(\frac{1}{\alpha}\right)+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{q-1}-\frac{1}{\alpha}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}, \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 &= \frac{(2-q)}{\lambda^2(q-1)^{\left(\frac{2}{\alpha}\right)+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{q-1}-\frac{2}{\alpha}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}, \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^3 &= \frac{(2-q)}{\lambda^3(q-1)^{\left(\frac{3}{\alpha}\right)+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{\alpha}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{q-1}-\frac{3}{\alpha}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}. \end{aligned}$$

Já para o segundo caso,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i &= \frac{(2-q)}{\lambda(1-q)^{(\frac{1}{\alpha})+1}} \frac{\Gamma(\frac{1}{\alpha}+1)\Gamma(\frac{1}{1-q}+1)}{\Gamma(\frac{1}{1-q}+\frac{1}{\alpha}+2)}, \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 &= \frac{(2-q)}{\lambda^2(1-q)^{(\frac{2}{\alpha})+1}} \frac{\Gamma(\frac{2}{\alpha}+1)\Gamma(\frac{1}{1-q}+1)}{\Gamma(\frac{1}{1-q}+\frac{2}{\alpha}+2)}, \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^3 &= \frac{(2-q)}{\lambda^3(1-q)^{(\frac{3}{\alpha})+1}} \frac{\Gamma(\frac{3}{\alpha}+1)\Gamma(\frac{1}{1-q}+1)}{\Gamma(\frac{1}{1-q}+\frac{3}{\alpha}+2)},\end{aligned}$$

em que os estimadores são encontrados resolvendo-se o sistema de equações acima.

### 3.4 Distribuição $q$ -Weibull: Contribuição

Aqui, apresentaremos uma das contribuições desse material para o modelo  $q$ -Weibull, consistindo em desenvolver uma propriedade para o modelo em estudo.

#### 3.4.1 Função Característica

A função característica (fc), ou Transformada de Fourier, consiste em uma ferramenta bastante utilizada na área de processamento de sinais (AVERBUCH et al., 2006). Particularmente, a fdp pode ser escrita por meio de sua fc, ou seja, é uma Transformada de Fourier sobre a fdp. Assim sendo, seja  $X$  uma variável aleatória com fda  $F(x)$ , então sua fc pode ser definida como (BILLINGSLEY, 2008):

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x), \quad t \in \mathbb{R}.$$

em que  $i = \sqrt{-1}$ .

**Proposição 1:** Considere as Equações (3.2) e (3.3) fdps para a distribuição  $q$ -Weibull, e seja  $t \in \mathbb{R}$ . As fcs da distribuição  $q$ -Weibull para os casos  $1 < q < 2$  e  $q < 1$  podem ser dadas por:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \frac{(2-q)}{\lambda^n(q-1)^{(n/\alpha)+1}} \beta \left( \frac{n}{\alpha} + 1, \frac{1}{q-1} - \frac{n}{\alpha} + 1 \right), \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \frac{(2-q)}{\lambda^n(1-q)^{(n/\alpha)+1}} \beta \left( \frac{n}{\alpha} + 1, \frac{1}{1-q} + \frac{n}{\alpha} + 2 \right),\end{aligned}$$

respectivamente. A prova desta proposição encontra-se no Apêndice A.

### 3.5 Transformada de Mellin

Densenvolvida por Robert Hjalmar Mellin (1854–1933), a Transformada de Mellin (TM) é um método que se aplica a diversas áreas tais como a matemática, física e engenharia. Desta forma, a TM, de acordo com [Nicolas e Anfinen \(2002, p. 8\)](#) “possui suas maiores aplicações na área de estatística quando a variável estudada assume valores em  $\mathbb{R}^+$ ”.

A título de exemplo, temos aplicações para análise de imagens de radar polarimétrico ([ANFINSEN; ELTOFT, 2011; BOMBRUN; BEAULIEU, 2008](#)). Neste sentido, a TM opera como uma alternativa à Transformada de Fourier, sendo uma ferramenta reconhecida por softwares de linguagem algébrica tais como Maple, Matlab e Mathematica.

Segundo [Nicolas e Anfinen \(2002\)](#), a metodologia TM, também conhecida como estatísticas de segundo tipo, tem analogia com estatísticas tradicionais produzindo momento e cumulantes a partir de funções características.

A metodologia citada acima consiste em associar uma função  $f(u)$  definida em  $\mathbb{R}^+$  a uma função  $\phi(s)$ , com  $s \in \mathbb{C}$ , dada por ([NICOLAS, 2005](#)):

$$\phi_x(s) = [f(u)](s) = \int_0^{\infty} u^{s-1} f(u) du, \quad (3.7)$$

na qual é denominada primeira função característica de segundo tipo, em outras palavras,  $E(U^{s-1})$ . Normalmente a integral (3.7) converge para valores de  $s$  localizados em uma faixa delimitada por duas linhas paralelas, ou seja

$$s = a + jb, \text{ onde } a \in ]a_1; a_2[ \text{ e } b \in \mathbb{R}.$$

Ainda, a TM possui o seu inverso, ([NICOLAS, 2005; COLOMBO, 1959](#)):

$$f(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} u^{s-1} \phi_x(s) ds$$

e se  $f(u)$  for uma fdp, a TM obedece a propriedade  $\phi_x(s) \Big|_{s=1} = 1$ .

A partir da derivação da primeira função característica da distribuição, segundo [Nicolas e Anfinen \(2002, p. 2\)](#): “isso leva naturalmente às definições de momentos de segunda ordem e cumulantes de segundo tipo”.

A segunda função característica de segundo tipo, é definida por [Nicolas e Anfinen \(2002, p. 3\)](#) como o logaritmo natural da primeira função característica de segundo tipo, a saber:

$$\psi_x(s) = \log(\phi_x(s)).$$

A Tabela 1 mostra a TM para ambos os casos do modelo  $q$ -Weibull.

Tabela 1 – Transformada de Mellin para o modelo  $q$ -Weibull

Modelo	TM	Restrição
$1 < q < 2$	$\frac{(2-q)}{\lambda^{s-1}(q-1)^{\left(\frac{s-1}{\alpha}\right)+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{\alpha}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{q-1}-\frac{s-1}{\alpha}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}$	$\frac{1}{q-1}-\frac{s-1}{\alpha}-1 > 0$
$q < 1$	$\frac{(2-q)}{\lambda^{s-1}(1-q)^{\left(\frac{s-1}{\alpha}\right)+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{\alpha}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{1-q}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s-1}{\alpha}+\frac{1}{1-q}+2\right)}$	$\frac{s-1}{\alpha}+\frac{1}{1-q}+2 > 0$

Os cálculos referentes a TM, encontram-se no Apêndice B.

### 3.6 Método dos log-cumulantes

Os log-momentos (LMs) também derivam da TM, bem como os momentos que provém da fc (KENDALL et al., 1948; LEHMANN; CASELLA, 2006). Desse modo, os LMs, ou  $\tilde{m}_v$  com  $v \in \mathbb{N}$ , são definidos como a seguir (NICOLAS, 2005):

$$\tilde{m}_v = \left. \frac{d^v \phi_x(s)}{ds^v} \right|_{s=1}.$$

Para definir os log-cumulantes (LCs) de segundo tipo, é feito a derivada da segunda função característica de segundo tipo  $\psi_x(s)$ , quando  $s = 1$  (NICOLAS, 2005):

$$\tilde{k}_v = \left. \frac{d^v \psi_x(s)}{ds^v} \right|_{s=1}, \quad (3.8)$$

cuja a Equação (3.8) nos mostra os log-cumulantes de ordem  $v$ ,  $\forall v \in \mathbb{N}$ .

Há uma relação analítica entre os LMs e LCs, similarmente aos momentos clássicos e seus LCs como apresentado em (LEHMANN; CASELLA, 2006; KENDALL et al., 1948). Logo, os três primeiros LCs podem ser reescritos da seguinte maneira (NICOLAS, 2005):

$$\begin{aligned} \tilde{k}_1 &= \tilde{m}_1, \\ \tilde{k}_2 &= \tilde{m}_2 - \tilde{m}_1^2, \\ \tilde{k}_3 &= \tilde{m}_3 - 3\tilde{m}_1\tilde{m}_2 + 2\tilde{m}_1^3. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Conforme Anfinzen e Eltoft (2011), os LCs de ordem  $v$ , dado em (3.9), podem ser generalizados, como a saber:

$$\tilde{k}_v = \tilde{m}_v - \sum_{r=1}^{v-1} \binom{v-1}{r-1} \tilde{k}_r \tilde{m}_{v-r}, \quad (3.10)$$

em que  $\tilde{m}_v$  pode ser substituído pelos LMs amostrais (ANFINSEN; ELTOFT, 2011; NICOLAS, 2005; ELTOFT; ANFINSEN; DOULGERIS, 2011):

$$\hat{\tilde{m}}_v = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n (\log x_r)^v, \quad (3.11)$$

sendo  $n$  o tamanho da amostra e  $x_r$  é a  $r$ -ésima observação da amostra.



### 3.7 Diagrama de Log-cumulantes

Como uma alternativa a seleção de modelos, temos o diagrama de Pearson, discutido em [Delignon, Garello e Hillion \(1997\)](#). O diagrama de Pearson tem por objetivo escolher o modelo que melhor descreve os dados. Suas coordenadas são índices de assimetria e curtose que apresentam a forma da distribuição. Todavia, [Nicolas \(2005\)](#) mostrou que o método de Pearson, muitas vezes, apresenta uma solução analítica difícil.

Levando em consideração esse problema, [Nicolas \(2005\)](#) apresentou uma solução, que é o diagrama de LCs  $(\tilde{k}_3, \tilde{k}_2)$  que tem semelhança funcional ao diagrama de Pearson. Com o diagrama  $(\tilde{k}_3, \tilde{k}_2)$ , ao invés de utilizar índices de assimetria e curtose, propõe-se um diagrama baseado nas estatísticas  $\tilde{k}_3$  e  $\tilde{k}_2$ , encontradas a partir da Equação (3.8).

Alguns estudos mostram aplicações do diagrama de log-cumulantes, a exemplo de [Nicolas \(2005\)](#) que mostra que o diagrama de Pearson é intratável e por isso o diagrama  $(\tilde{k}_3, \tilde{k}_2)$  se torna uma opção adequada. [Anfinzen e Eltoft \(2011\)](#) propõem o diagrama da matriz log-cumulante como uma forma de visualizar o espaço multidimensional, em que cada dimensão é representada por uma matriz log-cumulante. Desta forma, se torna mais fácil a utilização da TM, assim como fornece um conceito intuitivo sobre LCs. Como aplicações do diagrama de LCs, temos em [Anfinzen, Doulgeris e Eltoft \(2011\)](#); [Li et al. \(2011\)](#) e [Deng e López-Martínez \(2016\)](#) que o diagrama de LCs pode ser utilizado na classificação em dados de imagens SAR.

Nesta seção, utilizamos o diagrama  $(\tilde{k}_3, \tilde{k}_2)$  como uma ferramenta para avaliar qual modelo  $q$ -Weibull se ajusta aos dados. As Tabelas 2 e 3 contém os LCs para o modelo  $q$ -Weibull quando  $1 < q < 2$  e  $q < 1$ , respectivamente.

Tabela 2 – Log-cumulantes para o modelo  $q$ -Weibull  $1 < q < 2$

LCs	$1 < q < 2$
$\tilde{k}_1$	$-\log(\lambda) - \frac{1}{\alpha} \log(q-1) + \frac{1}{\alpha} \psi(1) - \frac{1}{\alpha} \psi\left(\frac{1}{q-1} - 1\right)$
$\tilde{k}_2$	$\frac{1}{\alpha^2} \psi^{(1)}(1) + \frac{1}{\alpha^2} \psi^{(1)}\left(\frac{1}{q-1} - 1\right)$
$\tilde{k}_3$	$\frac{1}{\alpha^3} \psi^{(2)}(1) - \frac{1}{\alpha^3} \psi^{(2)}\left(\frac{1}{q-1} - 1\right)$
$\vdots$	$\vdots$
$\tilde{k}_v \ (\forall v > 1)$	$\frac{1}{\alpha^v} \psi^{(v-1)}(1) + (-1)^v \frac{1}{\alpha^v} \psi^{(v-1)}\left(\frac{1}{q-1} - 1\right)$

Tabela 3 – Log-cumulantes para o modelo  $q$ -Weibull  $q < 1$

LCs	$q < 1$
$\tilde{k}_1$	$-\log(\lambda) - \frac{1}{\alpha} \log(1 - q) + \frac{1}{\alpha} \psi(1) - \frac{1}{\alpha} \psi\left(\frac{1}{1-q} + 2\right)$
$\tilde{k}_2$	$\frac{1}{\alpha^2} \psi^{(1)}(1) - \frac{1}{\alpha^2} \psi^{(1)}\left(\frac{1}{1-q} + 2\right)$
$\tilde{k}_3$	$\frac{1}{\alpha^3} \psi^{(2)}(1) - \frac{1}{\alpha^3} \psi^{(2)}\left(\frac{1}{1-q} + 2\right)$
$\vdots$	$\vdots$
$\tilde{k}_v \ (\forall v > 1)$	$\frac{1}{\alpha^v} \psi^{(v-1)}(1) - \frac{1}{\alpha^v} \psi^{(v-1)}\left(\frac{1}{1-q} + 2\right)$

Os LCs estão escritos em termos das funções Digama e Poligama, dadas por  $\psi(z) = \frac{d}{dz} \log \Gamma(z)$ ,  $\psi^{(n)}(z) = \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} \log \Gamma(z)$ , (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1948, p. 258-260), respectivamente. Os cálculos relacionados aos LCs estão contidos no apêndice B.

A Figura 7, nos mostra as regiões do diagrama  $(\tilde{k}_3, \tilde{k}_2)$  referentes aos modelos  $q$ -Weibull. A representação dos modelos no diagrama dependem da quantidade de parâmetros contidos nas expressões dos LCs. Sendo assim, os modelos podem ser representados por curvas, desde que se tenha apenas um parâmetro nas expressões, ou subespaços para expressões com dois ou mais parâmetros (ANFENSEN; DOULGERIS; ELTOFT, 2011; ANFENSEN; ELTOFT, 2011).

Desta forma, podemos observar que os modelos  $q$ -Weibull possuem dois parâmetros nas expressões dos LCs e portanto esses modelos serão representados através de um subespaço no diagrama  $(\tilde{k}_3, \tilde{k}_2)$ .

### 3.8 Método de estimação por LCs

O método de estimação aqui proposto consiste em uma forma análoga ao método de estimação dos momentos, em que igualamos os LCs (quantidades já calculadas nas Tabelas 2 e 3) aos seus respectivos LMs de acordo com a relação analítica encontrada na Equação (3.10), além disso, substituiremos os LMs pelos seus LMs amostrais (Eq. 3.11) que são quantidades que dependem da amostra.

Desta forma, teremos um sistema de equações onde podemos derivar a estimação por LCs para os parâmetros  $\alpha$ ,  $\lambda$  e  $q$ , que chamaremos aqui de  $\hat{\alpha}_{LC}$ ,  $\hat{\lambda}_{LC}$  e  $\hat{q}_{LC}$ , respectivamente. Para o primeiro caso da  $q$ -Weibull e assumindo  $q$  conhecido, temos:

$$\hat{\lambda}_{LC} = \exp \left\{ \hat{m}_1 - \frac{1}{\hat{\alpha}_{LC}} \log(\hat{q}_{LC} - 1) + \frac{1}{\hat{\alpha}_{LC}} \psi(1) - \frac{1}{\hat{\alpha}_{LC}} \psi \left( \frac{1}{\hat{q}_{LC} - 1} - 1 \right) \right\}$$

e

$$\hat{\alpha}_{LC} = \sqrt{\frac{\psi^{(1)}(1) + \psi^{(1)} \left( \frac{1}{\hat{q}_{LC} - 1} - 1 \right)}{\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2}}.$$

Além disso,  $\hat{q}_{LC}$  pode ser definido como a solução da equação não linear abaixo:

$$\hat{q}_{LC} = \exp \left\{ \psi(1) - \psi \left( \frac{1}{\hat{q}_{LC} - 1} - 1 \right) - \frac{\sqrt[3]{\Lambda}}{\sqrt[2]{\gamma}} \left[ \sqrt[2]{\gamma} 2\hat{m}_1 - \log(\hat{q}_{LC} - 1) + \psi(1) - \psi \left( \frac{1}{\hat{q}_{LC} - 1} - 1 \right) \right] \right\} + 1$$

em que

$$\gamma = \frac{\psi^{(1)}(1) + \psi^{(1)} \left( \frac{1}{\hat{q}_{LC} - 1} - 1 \right)}{\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2}$$

e

$$\Lambda = \frac{\psi^{(2)}(1) - \psi^{(2)} \left( \frac{1}{\hat{q}_{LC} - 1} - 1 \right)}{\hat{m}_3 - 3\hat{m}_1\hat{m}_2 + 2\hat{m}_1^3}.$$

Este método, chamaremos de método de estimação por log-cumulantes, ou MLC.

### 3.9 Novas ferramentas de qualidade de ajuste para modelos $q$ -Weibull

É notório na literatura o amplo interesse pelo desenvolvimento de novos modelos de distribuição na tentativa de melhor explicar os fenômenos que surgem, a exemplo, temos a  $q$ -Gaussiana (AKILLI; YILMAZ; AKDENIZ, 2019); a Log- $q$ -Gaussiana (KOIKE; SHIMEGI, 2018), bem como os modelos considerados na introdução. Neste sentido, aqui propomos uma medida de bondade de ajuste qualitativa para o modelo  $q$ -Weibull, considerando ambos os casos da distribuição. Neste diagrama temos a representação do modelo como um subespaço, considerando que as equações contidas nas Tabelas 2 e 3 apresentam dois parâmetros nas estatísticas de  $\tilde{k}_2$  e  $\tilde{k}_3$ .

Com essa ferramenta, poderemos, de forma visual, verificar se um determinado conjunto de dados é modelado pela distribuição  $q$ -Weibull.

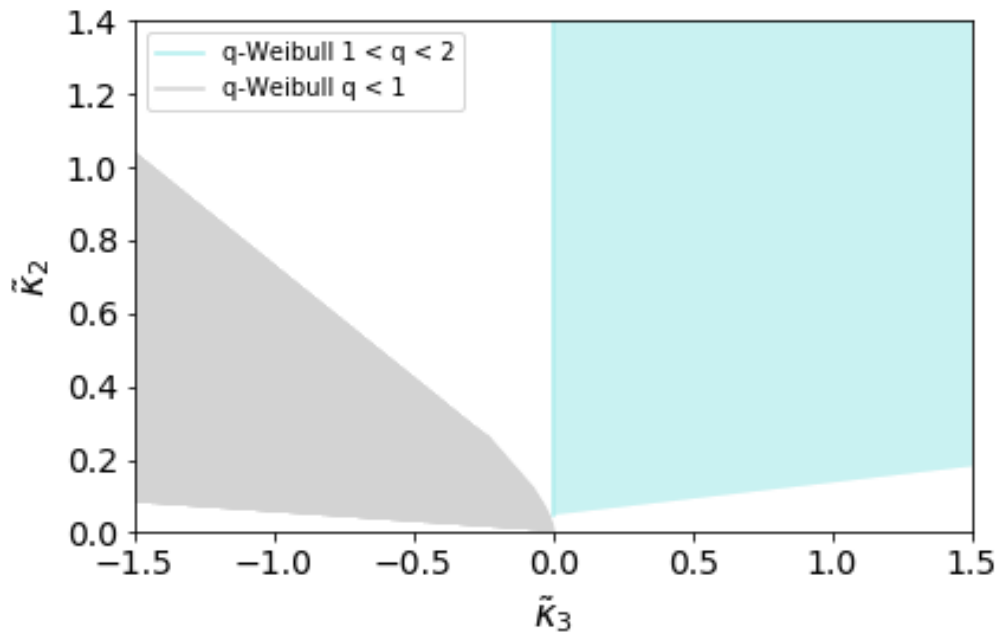


Figura 7 – Diagrama  $(\tilde{k}_3, \tilde{k}_2)$  para os modelos  $q$ -Weibull.

### 3.10 Estatística $T^2$ de Hotelling

Sendo a generalização da estatística de  $t$  Student, a estatística  $T^2$  de Hotelling (ANDERSON, 2003, p. 170) é dada por:

$$T^2 = n(\bar{x} - \mu)^T S^{-1}(\bar{x} - \mu), \quad (3.12)$$

em que  $x$  é um vetor de variáveis aleatórias, que seguem  $x \sim \mathcal{N}_v(\mu, \Sigma)$ .  $\mu$ ,  $\Sigma$ ,  $\bar{x}$  são a média, a matriz de covariância e a média da amostra, respectivamente. Já  $S$ , é a matriz de covariância da amostra, que pode ser escrita como  $S = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n x_r x_r^T - n\bar{x}\bar{x}^T$ . Essas estatísticas seguem a distribuição F-Snedecor com  $v$  e  $n - v$  graus de liberdade, podendo ser denotada por  $F_{v, n-v}$ .

Considerando a hipótese  $E(\bar{X}) = \mu$  e um nível de significância  $\eta$ , o teste da razão de verossimilhança rejeita a hipótese se  $T^2 \geq Q_f(1 - \eta; v, n - v)$ , em que  $Q_f(\bullet; v, n - v)$  é a função quantil para  $F_{v, n-v}$  (ANDERSON, 2003).

Para grandes amostras, a distribuição de  $T^2$  se aproxima da sua distribuição limite, que é a distribuição qui-quadrado ( $\chi_n$ ) (ANFENSEN; ELTOFT, 2011). Esse é um resultado importante, pois para casos em que  $x_r$  não é normal a distribuição de (3.12) não é conhecida.

### 3.11 Estatística $T^2$ de Hotelling e Log-cumulantes

Aqui, propomos uma medida de bondade de ajuste quantitativa, objetivando a inserção dos LCs na estatística  $T^2$  de Hotelling. A finalidade principal é estimar os LCs e posteriormente classificar a distribuição subjacente de acordo com a localização dos LCs estimados sobre o diagrama  $(\tilde{k}_3, \tilde{k}_3)$ .

Para isso, necessitaremos de uma estatística de teste, onde testaremos a hipótese nula  $H_0 : E\left(\begin{bmatrix} \hat{k}_2 & \hat{k}_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \tilde{k}_2 & \tilde{k}_3 \end{bmatrix}$  em que esse teste "abre caminhos" para aceitar ou não a adequação dos LCs estimados para regiões específicas do diagrama de LCs. Sendo os LCs quantidades analiticamente bem definidas (Tabelas 2 e 3), essa relação entre os parâmetros da distribuição e os LCs pode ser utilizada para encontrar estimadores para os LCs. Desta forma, consideraremos as seguintes quantidades:

$$\tilde{m} = (\tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_p)^T \text{ e } \hat{m} = (\hat{m}_1, \dots, \hat{m}_p)^T.$$

O teorema do limite central de Cramér-Wold (BILODEAU; BRENNER, 2008), nos mostra que

$$\sqrt{n}(\hat{m} - \tilde{m}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} \mathcal{N}_v(0, M_v),$$

em que a amostra segue a distribuição normal multivariada com média  $\mu$  e matriz de covariância  $\Sigma$ , denotado por  $x \sim \mathcal{N}_v(\mu, \Sigma)$ . Além disso, temos que  $M_v$  é dado por

$$nE\left\{(\hat{m} - \tilde{m})(\hat{m} - \tilde{m})^T\right\} = \left\{\tilde{m}_{r+j} - \tilde{m}_r\tilde{m}_j\right\} \Bigg|_{r,j=1}^v. \quad (3.13)$$

Ainda, considerando as funções compostas que transformam momentos para cumulantes, temos:

$$\tilde{k}_v = g_v(\tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_v) \text{ e } \hat{k}_v = g_v(\hat{m}_1, \dots, \hat{m}_v).$$

Pelo teorema do limite central de Cramér-Wold, temos

$$\sqrt{n}(\hat{k} - \tilde{k}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} \mathcal{N}_v(0, K_v),$$

em que  $K_v$  pode ser escrito como:

$$K_v = J_v^T \cdot M_v \cdot J_v, \quad (3.14)$$

$$\nabla g_v = \left[ \frac{dg_v(\tilde{m})}{d\tilde{m}_1}, \dots, \frac{dg_v(\tilde{m})}{d\tilde{m}_v} \right]$$

e

$$J_v = [\nabla g_1 | \dots | \nabla g_v].$$

Ademais, notamos que para grandes amostras, considerando o método delta generalizado (LEHMANN; CASELLA, 1998) o vetor estimado  $\begin{bmatrix} \hat{k}_2 & \hat{k}_3 \end{bmatrix}^T$  segue a distribuição normal bivariada com média  $\begin{bmatrix} \tilde{k}_2 & \tilde{k}_3 \end{bmatrix}^T$  e uma matriz de covariância assintótica  $K$ , ou seja

$$\left( \begin{bmatrix} \hat{k}_2 \\ \hat{k}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{k}_2 \\ \tilde{k}_3 \end{bmatrix} \right) \stackrel{a}{\sim} \mathcal{N}_2(0, K)$$

$$\text{e } \Sigma = \text{Cov}(\hat{m}_r, \hat{m}_j) \Big|_{r,j=1}^v = \frac{1}{n}(\tilde{m}_{r+j} - \tilde{m}_r \tilde{m}_j).$$

Então, comparando a Eq. (3.12) com os LCs de segunda e terceira ordem  $\tilde{k}_2, \tilde{k}_3$ , nós temos que  $\mu = \begin{bmatrix} \tilde{k}_2 & \tilde{k}_3 \end{bmatrix}^T$  e  $\bar{x} = \begin{bmatrix} \hat{k}_2 & \hat{k}_3 \end{bmatrix}^T$ . A matriz  $S$  será substituída pela matriz  $K$ . Portanto, sendo  $\eta$  um nível de significância específico, temos a seguinte estatística de teste:

$$T^2 = n \left( \begin{bmatrix} \hat{k}_2 \\ \hat{k}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{k}_2 \\ \tilde{k}_3 \end{bmatrix} \right)^T \hat{K}^{-1} \left( \begin{bmatrix} \hat{k}_2 \\ \hat{k}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{k}_2 \\ \tilde{k}_3 \end{bmatrix} \right), \quad (3.15)$$

em que o inverso de  $K$  é obtido pela inversão usual de matriz (HARVILLE, 1997) se a matriz é não-singular, caso contrário, utiliza-se a inversa generalizada de Moore-Pearson (RAO et al., 2008). Portanto, considerando grandes amostras, a distribuição associada a variável aleatória de  $T^2$  é a distribuição  $\chi^2$ . Logo, em (3.15) podemos utilizar a aproximação  $Q_F(\bullet; v, n - v) \approx Q_{\chi^2}(\bullet; v)$ , em que  $Q_{\chi^2}(\bullet; v)$  é a função quantil para a distribuição  $\chi^2$  com  $v$  graus de liberdade. Ainda, podemos derivar elipses de confiança com o nível de significância  $\eta$ , dadas por:

$$\left( \begin{bmatrix} \hat{k}_2 \\ \hat{k}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{k}_2 \\ \tilde{k}_3 \end{bmatrix} \right)^T \hat{K}^{-1} a \left( \begin{bmatrix} \hat{k}_2 \\ \hat{k}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{k}_2 \\ \tilde{k}_3 \end{bmatrix} \right) \leq \frac{1}{n} Q_{\chi^2}(\eta; 2), \quad (3.16)$$

em que  $Q_{\chi^2}(\eta; 2)$  é a função quantil para  $\chi^2_2$ . A elipse em (3.16) está centrada em  $(\tilde{k}_2, \tilde{k}_3)$  e os seus respectivos eixos são direcionados de acordo com os vetores da matriz  $\hat{K}$  (HÄRDLE; SIMAR, 2007).

**Proposição 2:** Seja  $X$  uma variável aleatória que segue a distribuição  $q$ -Weibull com parâmetros  $\alpha > 0$ ,  $\lambda > 0$  e  $1 < q < 2$ . Então, a estatística  $T^2$  de Hotelling, baseada nos LCs, é dada por:

$$T_{q-W}^2 = \frac{n\alpha^6}{\delta_{22}\delta_{33} - \delta_{23}^2} [\hat{\delta}_{33}(\hat{k}_2 - \tilde{k}_2)^2 + \hat{\delta}_{22}(\hat{k}_3 - \tilde{k}_3)^2 - 2\hat{\delta}_{23}(\hat{k}_2 - \tilde{k}_2)(\hat{k}_3 - \tilde{k}_3)].$$

**Proposição 3:** Seja  $X$  uma variável aleatória que segue a distribuição  $q$ -Weibull com parâmetros  $\alpha > 0$ ,  $\lambda > 0$  e  $1 < q < 2$ . Então, a estatística  $T^2$  de Hotelling, baseada nos LCs, é dada por:

$$T_{q-W}^2 = \frac{n\alpha^6}{\delta_{22}^*\delta_{33}^* - \delta_{23}^{*2}} [\hat{\delta}_{33}^*(\hat{k}_2 - \tilde{k}_2)^2 + \hat{\delta}_{22}^*(\hat{k}_3 - \tilde{k}_3)^2 - 2\hat{\delta}_{23}^*(\hat{k}_2 - \tilde{k}_2)(\hat{k}_3 - \tilde{k}_3)].$$

A prova dessas proposições encontram-se no Apêndice C, juntamente com os algoritmos para gerar a estatística de teste.

## 4 Resultados Numéricos

Neste capítulo, discutiremos os resultados do estudo de Simulação de Monte Carlo realizada para verificar o desempenho dos métodos de estimação: MMV, MM e MLC. Ademais, também mostraremos experimentos utilizando bancos de dados reais para analisar o efeito do uso das estimativas para as novas medidas de bondade de ajuste.

### 4.1 Estudo de simulação

Para avaliar o desempenho dos estimadores a partir dos métodos MMV, MM e MLC, foi realizada uma Simulação de Monte Carlo considerando, baseado em [Vasconcelos et al. \(2020\)](#). Para o primeiro caso da distribuição, consideramos os tamanhos amostrais  $n = 30, 50, 100, 300$  e , consideramos  $\alpha = 1$ ,  $\lambda \in \{0.2, 0.7, 1\}$  e  $q \in \{1.01, 1.02, 1.03, 1.04, 1.1\}$ . Já para o segundo caso, consideramos  $n = 30, 50, 100, 300, 500, 1000$   $\alpha \in \{0.5, 1.2, 2\}$ ,  $\lambda \in \{0.08, 0.1\}$  e  $q \in \{0.5, 0.9\}$ . Para cada combinação  $(\alpha, \lambda, q, n)$  geramos 1.000 replicações da simulação em que os estimadores de cada método foram avaliados para vários tamanhos de amostra.

A simulação foi realizada através do software estatístico R, onde utilizou-se o pacote 'optimx' e a função 'optimx' para as estimativas do MMV, já para os métodos MM e MLC utilizou-se o pacote 'BB' e a função BBsolve. Para comparação dos métodos utilizados as quantidades de viés absoluto e raiz quadrada do erro quadrático médio (REQM), dado por  $|E(\hat{\theta}_i) - \theta_i|$  e  $\sqrt{\frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} E(\hat{\theta} - \theta)^2}$ , respectivamente.

A Tabela 4 mostra que para o primeiro caso da  $q$ - Weibull, o MM e MLC mostraram-se melhores que o MMV, tanto no critério de viés absoluto, REQM, quanto no custo computacional. O MMV apesar de possuir um custo computacional menor, não conseguiu convergir na estimativa de nenhum parâmetro da distribuição. Na figura 8 podemos perceber o comportamento do REQM e viés absoluto para os métodos de estimação analisados, mostrando que o MM e MLC obtiveram resultados semelhantes.

Para o segundo caso da  $q$ -Weibull, quando  $q < 1$ , a Tabela 5 nos mostra que o método da MMV também não conseguiu convergir para o real valor dos parâmetros de acordo com o tamanho da amostra. O melhor método de estimação para os parâmetros foi o MM, produzindo um menor viés absoluto para os três parâmetros da distribuição. O MLC obteve resultados semelhantes ao MM, exceto para  $\lambda$ . Podemos notar, que o MLC apresentou o melhor custo computacional entre os três métodos estudados, neste caso, sendo uma melhor alternativa para a estimação dos parâmetros para o segundo caso do modelo  $q$ -Weibull. Na Figura 9 podemos notar o comportamento do viés absoluto e



REQM.

Apesar do MM ter o seu destaque, o MLC tem sua vantagem pois encontramos equações de formas fechadas para os parâmetros, indicando um menor custo computacional em relação aos demais métodos.

Tabela 4 – Viés absoluto para o caso  $1 < q < 2$ 

n	Parâmetros ( $\alpha, \lambda, q$ )	MM			MMV			MLC		
		$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{q}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{q}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{q}$
30	(1, 1, 1,1)	0,3326	0,1423	0,3656	0,3616	0,3904	0,211	0,5101	0,1855	0,1037
50		0,308	0,1203	0,3409	0,3157	0,3506	0,1985	0,2631	0,275	0,0676
100		0,2838	0,0972	0,3168	0,2774	0,3158	0,1862	0,1313	0,3063	0,0453
300		0,2559	0,0715	0,2891	0,2534	0,2717	0,1689	0,0491	0,269	0,0419
30	(1, 0,2, 1,01)	0,0439	0,1086	0,059	0,0604	0,3717	0,1344	0,3951	0,1649	0,1777
50		0,0464	0,1048	0,0614	0,0591	0,3573	0,1171	0,2017	0,0196	0,1467
100		0,0537	0,1031	0,0611	0,0563	0,3383	0,0987	0,0964	0,0561	0,1319
300		0,059	0,1031	0,058	0,057	0,3132	0,0834	0,0357	0,0975	0,1238
30	(1, 0,2, 1,02)	0,0479	0,1059	0,0511	0,0611	0,369	0,1412	0,3947	0,1712	0,1717
50		0,0498	0,1015	0,0533	0,0604	0,3548	0,1248	0,205	0,0283	0,1392
100		0,0605	0,1023	0,0536	0,0659	0,3397	0,1097	0,0966	0,052	0,1253
300		0,0757	0,1093	0,0509	0,0747	0,3183	0,095	0,0355	0,0924	0,1184
30	(1, 0,2, 1,03)	0,0497	0,1017	0,043	0,062	0,3678	0,1482	0,396	0,1782	0,164
50		0,0512	0,0961	0,0447	0,0633	0,354	0,1331	0,2045	0,0348	0,1307
100		0,0648	0,0997	0,0462	0,0725	0,3395	0,1197	0,0969	0,047	0,1169
300		0,089	0,1131	0,0445	0,0891	0,3231	0,1056	0,0354	0,089	0,1122
30	(1, 0,2, 1,04)	0,0514	0,0973	0,0348	0,0641	0,3643	0,1563	0,4013	0,1855	0,156
50		0,0532	0,093	0,0381	0,0641	0,3541	0,1404	0,2066	0,0403	0,1237
100		0,0686	0,0966	0,0387	0,0786	0,3394	0,1292	0,0981	0,0396	0,1114
300		0,0898	0,107	0,0389	0,0905	0,3231	0,1133	0,0352	0,0838	0,1066
30	(1, 0,7, 1,01)	0,2441	0,3576	0,3671	0,6525	0,583	0,1451	0,4594	0,3352	0,1777
50		0,2176	0,3328	0,3407	0,2934	0,5629	0,1361	0,2181	0,4382	0,1442
100		0,1693	0,2855	0,2925	0,1703	0,4953	0,1353	0,1089	0,3981	0,1273
300		0,1208	0,2376	0,244	0,1157	0,4196	0,1208	0,041	0,3406	0,1169

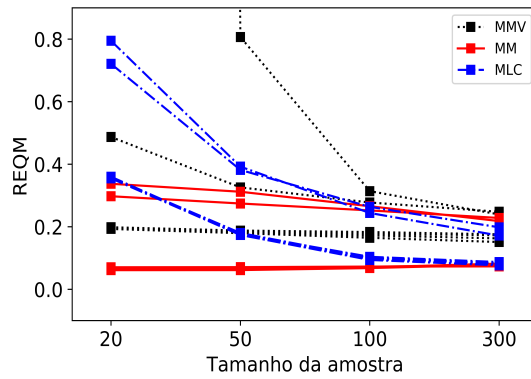


Figura 8 – REQM para os três métodos de estimação para o caso  $1 < q < 2$

Tabela 5 – Viés absoluto para o caso  $q < 1$

n	Parâmetros ( $\alpha, \lambda, q$ )	MM			MMV			MLC		
		$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{q}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{q}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{q}$
30	(1,2, 0,1, 0,5)	0,0281	0,0240	0,1861	0,0720	0,0826	0,1554	0,4180	0,1513	0,0170
50		0,0209	0,0232	0,1772	0,0390	0,0772	0,1502	0,2113	0,1329	0,0150
100		0,0123	0,0224	0,1678	0,0351	0,0699	0,1485	0,1138	0,1201	0,0147
300		0,0110	0,0216	0,1656	0,0317	0,0599	0,1401	0,0521	0,1077	0,0094
500		0,0109	0,0213	0,1649	0,0313	0,0563	0,1400	0,0369	0,1060	0,0069
1000		0,0160	0,0211	0,1647	0,0264	0,0530	0,1404	0,0241	0,1040	0,0092
30	(1,2, 0,08, 0,5)	0,0258	0,0211	0,2018	0,1188	0,0720	0,1711	0,1190	0,0502	0,1244
50		0,0255	0,0210	0,1968	0,0357	0,0704	0,1893	0,0117	0,0343	0,1165
100		0,0238	0,0209	0,1914	0,0276	0,0657	0,1824	0,0144	0,0214	0,1076
300		0,0184	0,0202	0,1803	0,0195	0,0606	0,1880	0,0128	0,0081	0,1062
500		0,0143	0,0213	0,1764	0,0152	0,0587	0,1816	0,0173	0,0053	0,1000
1000		0,0085	0,0213	0,1764	0,0092	0,0564	0,1812	0,0041	0,0045	0,1097
30	(0,5, 0,1, 0,5)	0,0308	0,0445	0,1085	0,2508	0,3357	0,1213	0,171	0,0952	0,0383
50		0,0276	0,041	0,1030	0,2400	0,3301	0,1195	0,0883	0,0900	0,0245
100		0,0255	0,0381	0,1023	0,2372	0,3277	0,1096	0,0470	0,0836	0,0220
300		0,0247	0,0372	0,1001	0,2331	0,3130	0,1085	0,0209	0,0795	0,0214
500		0,0247	0,0368	0,0912	0,2261	0,3048	0,1074	0,0145	0,0779	0,0186
1000		0,0232	0,037	0,0907	0,2108	0,2678	0,1000	0,0091	0,0777	0,0137
30	(2, 0,1, 0,9)	0,1083	0,0057	0,0579	0,4682	0,0407	0,0950	0,6802	0,2802	0,3661
50		0,1041	0,0054	0,0591	0,5186	0,0366	0,0656	0,3592	0,2690	0,1778
100		0,0944	0,0050	0,0502	0,5469	0,0352	0,0324	0,1901	0,2524	0,0761
300		0,0852	0,0048	0,0500	0,2656	0,0343	0,0087	0,0789	0,2268	0,0091
500		0,0844	0,0046	0,0400	0,1961	0,0341	0,0025	0,0533	0,2193	0,0074
1000		0,0822	0,0046	0,0407	0,2086	0,0247	0,0052	0,0320	0,2112	0,0028

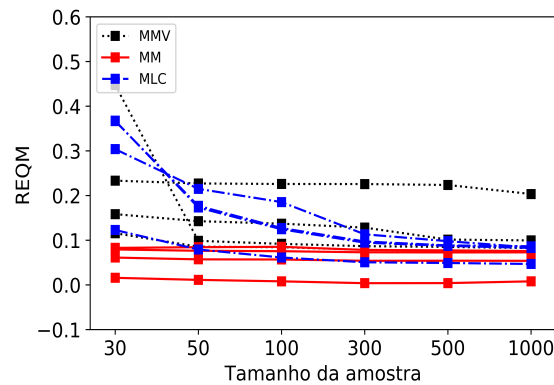


Figura 9 – REQM para os três métodos de estimação para o caso  $q < 1$

## 4.2 Aplicação a dados reais

### 4.2.1 Conjunto de dados selecionados e estatísticas descritivas

Nesta seção, forneceremos dois experimentos com dados reais para ilustrar e comparar o desempenho dos estimadores pelo MLC e MM para o modelo  $q$ -Weibull. Para tanto, consideraremos:

- Dados aerotransportados: dados relacionados ao tempo de reparo em horas para um transceptor de comunicação aerotransportado (JORGENSEN, 2012; ALVEN, 1964);
- Dados rastreamento: tempos de falha e os tempos de execução para uma amostra de dispositivos de um estudo de rastreamento de campo de um sistema maior (WILLIAM; ESCOBAR, 1998).

Tabela 6 – Estatística descritiva dos dados

Dados	Min.	Média	Mediana	Moda	DP	Ass.	Curt.	Máx.	CV
Aertransportados	0,20	3,64	1,75	0,5/1,5	5,07	2,91	11,67	24,5	139,34
Rastreamento	2,00	177,03	196,50	300	114,99	-0,28	1,45	300,00	64,95

A Tabela 6 nos mostra a estatística descritiva dos dados. Notamos que o primeiro conjunto de dados é bimodal, enquanto o segundo é unimodal. Os dados relacionados aos aertransportados possuem um menor desvio padrão (5.07), enquanto os de rastreamento mostram uma maior dispersão. Dados de rastreamento possuem média menor do que a mediana, resultando em uma assimetria negativa, enquanto os dados aertransportados mostram um comportamento contrário, com assimetria positiva. Os dados aertransportados possuem uma medida de curtose alta (11.67) indicando uma dificuldade em escolher o modelo possível de estimativa, enquanto os dados de rastreamento possuem uma pequena medida de curtose. Relacionado ao coeficiente de variação (CV), temos que ambos os

conjuntos de dados são heterogêneos, pois apresentam valores para o CV acima de 30, mostrando que os dados estão dispersos em torno da média.

A Figura 10, exibe o diagrama de LCs, sendo uma ferramenta alternativa ao diagrama de Pearson, como medida de bondade de ajuste qualitativa. Esse diagrama consiste na representação de ambos os casos do modelo  $q$ -Weibull, mostrando que a distribuição  $q$ -Weibull pode ser representada através de subespaços no diagrama  $(\tilde{k}_3, \tilde{k}_2)$ . Para cada conjunto de dados, calculamos os LCs amostrais de acordo com a amostragem de bootstrap com 10.000 réplicas e tamanhos de amostra de 90%. Aqui, aplicamos o banco de dados de rastreamento para o caso  $q < 1$  do modelo, enquanto os dados de aerotransportados para o caso  $1 < q < 2$ . Nota-se que o primeiro caso da  $q$ -Weibull é um bom modelo para representar os dados de aerotransportados, assim como o segundo caso do modelo pode representar os dados de rastreamento.

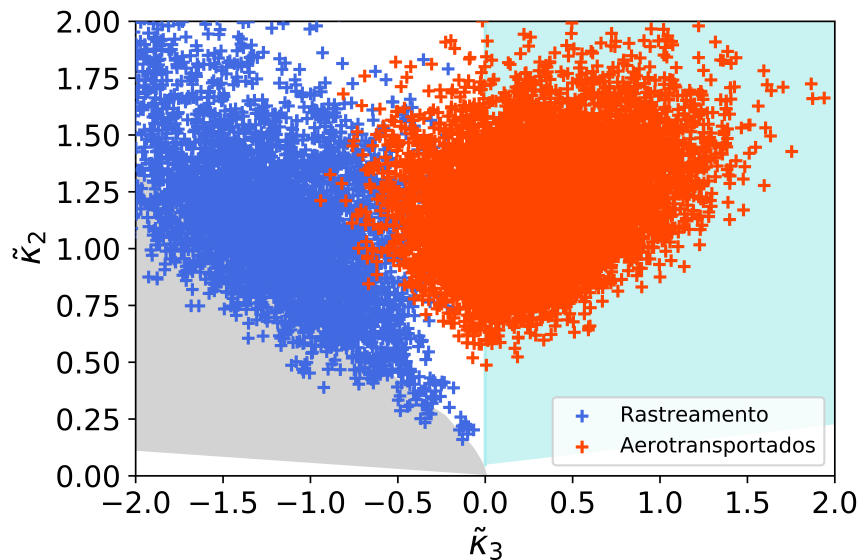


Figura 10 – Diagrama de LCs mostrando a variedade dos LCs teóricos para o modelo  $q$ -Weibull, bem como uma coleção de LCs representando os dados de rastreamento e aerotransportados.

Agora, iremos avaliar o desempenho dos métodos MM e MLC com relação a um nível de confiança de 95% derivados da Proposição 2. A Tabela 7 nos mostra a estatística  $T^2$  de Hotelling e p-valor para o primeiro caso do modelo  $q$ -Weibull, onde testamos os dados de aerotransportados. Podemos notar que ambos os métodos de estimação se mostram eficazes no que diz respeito ao uso da medida de bondade de ajuste quantitativa, no entanto, o MLC produz uma quantidade menor da estatística de teste.

Tabela 7 – Estatística  $T^2$  de Hotelling e p-valor para o primeiro caso do modelo  $q$ -Weibull.

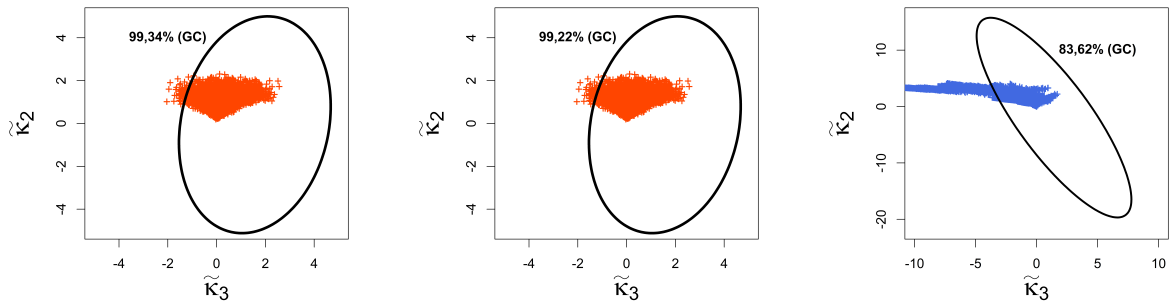
Aertransportados		
Método	$T^2$	p-valor
MM	2,9285	0,0446
MLC	2,4319	0,0784

De modo análogo, para o segundo caso da distribuição  $q$ -Weibull, testamos os dados de rastreamento e observamos que também os dois métodos de estimação obtiveram bons desempenhos para a medida de bondade de ajuste quantitativa (Tabela 8).

Tabela 8 – Estatística  $T^2$  de Hotelling e p-valor para o segundo caso do modelo  $q$ -Weibull.

Rastreamento		
Método	$T^2$	p-valor
MM	0,1471	0,9307
MLC	0,0257	0,9943

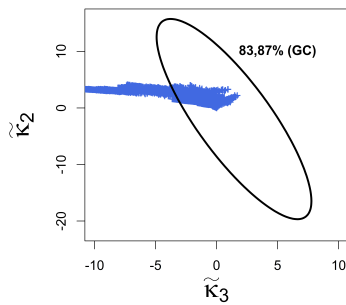
Para confirmação da análise anterior, quantificamos o grau de cobertura das elipses de confiança (95%) para os métodos de estimação MM e MLC e para cada banco de dados e seus respectivos modelos, mostrados na Figura 11.



(a) Aertransportados (MLC)

(b) Aertransportados (MM)

(c) Rastreamento (MLC)



(d) Rastreamento (MM)

Figura 11 – Elipses de confiança para o caso  $1 < q < 2$  e  $q < 1$ , respectivamente

## 5 Conclusão

Neste trabalho, tivemos como objetivo introduzir um novo método de estimação baseado na TM, como também medidas de bondade de ajuste para o modelo  $q$ -Weibull. Para isso, derivamos expressões de forma fechada para a função característica do segundo tipo; (LCs), estatística de teste baseada em  $T^2$  de Hotelling e elipses de confiança.

Para conduzir os experimentos, foi realizada uma simulação de Monte Carlo para ambos os casos do modelo  $q$ -Weibull. Foi notório que para os dois casos do modelo, o melhor método de estimação foi o método dos momentos e em seguida o método de estimação dos log-cumulantes, enquanto que o método da máxima verossimilhança não conseguiu convergir para o real valor do parâmetro.

Por fim, experimentos com bancos de dados reais foram utilizados para as medidas de bondade de ajuste, que indicaram que tanto o método dos momentos quanto o método de log-cumulantes, são métodos que desempenham um bom comportamento para a medida de bondade de ajuste quantitativa.

Como trabalhos futuros, pretendemos realizar a criação de pacotes no software R para as medidas de bondade de ajuste, para que assim possamos auxiliar o desenvolvimento de outras pesquisas.

# Referências

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. [S.l.]: US Government printing office, 1948. v. 55. Citado 3 vezes nas páginas [16](#), [36](#) e [37](#).
- AKILLI, M.; YILMAZ, N.; AKDENIZ, K. G. Study of the q-gaussian distribution with the scale index and calculating entropy by normalized inner scalogram. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 383, n. 11, p. 1099–1104, 2019. Citado na página [17](#).
- ALVEN, W. H. V. *Reliability engineering*. [S.l.]: Prentice Hall, 1964. Citado na página [25](#).
- ALZAATREH, A.; LEE, C.; FAMOYE, F. A new method for generating families of continuous distributions. *Metron*, v. 63-79, p. 112887, 2013. Citado na página [1](#).
- ANDERSON, T. W. *An introduction to multivariate statistical analysis*. [S.l.], 2003. Citado na página [18](#).
- ANFENSEN, S. N.; DOULGERIS, A. P.; ELTOFT, T. Goodness-of-fit tests for multilook polarimetric radar data based on the mellin transform. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, IEEE, v. 49, n. 7, p. 2764–2781, 2011. Citado 3 vezes nas páginas [15](#), [16](#) e [40](#).
- ANFENSEN, S. N.; ELTOFT, T. Application of the matrix-variate mellin transform to analysis of polarimetric radar images. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, IEEE, v. 49, n. 6, p. 2281–2295, 2011. Citado 5 vezes nas páginas [13](#), [14](#), [15](#), [16](#) e [18](#).
- ASSIS, E. M. et al. Modeling failure rate of a robotic welding station using generalized q-distributions. *International Journal of Quality & Reliability Management*, Emerald Group Publishing Limited, 2015. Citado na página [2](#).
- ASSIS, E. M. d. O modelo  $q$ -weibull em confiabilidade, árvores de falha dinâmicas e implementação de manutenção. 2013. Citado 2 vezes nas páginas [1](#) e [2](#).
- AVERBUCH, A. et al. Fast and accurate polar fourier transform. *Applied and computational harmonic analysis*, Elsevier, v. 21, n. 2, p. 145–167, 2006. Citado na página [12](#).
- BILLINGSLEY, P. *Probability and measure*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008. Citado na página [12](#).
- BILODEAU, M.; BRENNER, D. *Theory of multivariate statistics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2008. Citado na página [19](#).
- BOLFARINE, H.; SANDOVAL, M. C. Introdução inferência estatística. *Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro*, 2001. Citado na página [11](#).
- BOMBRUN, L.; BEAULIEU, J.-M. Fisher distribution for texture modeling of polarimetric sar data. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, IEEE, v. 5, n. 3, p. 512–516, 2008. Citado na página [13](#).

BRITO, C. C. R. Método gerador de distribuições e classes de distribuições probabilísticas. *Tese de Doutorado*, PPGBEA, 2014. Citado na página 1.

BRITO, C. R. de et al. Method for generating distributions and classes of probability distributions: the univariate case. *Hacetatepe Journal of Mathematics and Statistics*, v. 48, n. 3, p. 897–930, 2019. Citado na página 1.

COLOMBO, S. Les transformations de mellin et de hankel: Applicationsa la physique mathématique. monographies du centre d'études mathématiques en vue des applications: B. *Méthodes de Calcul. Centre National de la Recherche Scientifique, Paris*, 1959. Citado na página 13.

CORDEIRO, G. M.; CASTRO, M. de. A new family of generalized distributions. *Journal of statistical computation and simulation*, Taylor & Francis, v. 81, n. 7, p. 883–898, 2011. Citado na página 1.

DELIGNON, Y.; GARELLO, R.; HILLION, A. Statistical modelling of ocean sar images. *IEE Proceedings-Radar, Sonar and Navigation*, IET, v. 144, n. 6, p. 348–354, 1997. Citado na página 15.

DENG, X.; LÓPEZ-MARTÍNEZ, C. Higher order statistics for texture analysis and physical interpretation of polarimetric sar data. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, IEEE, v. 13, n. 7, p. 912–916, 2016. Citado na página 15.

ELTOFT, T.; ANFINSEN, S. N.; DOULGERIS, A. P. A multitexture model for multilook polarimetric radar data. In: IEEE. *2011 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*. [S.l.], 2011. p. 1048–1051. Citado na página 14.

HÄRDLE, W. K.; SIMAR, L. Cluster analysis. In: *Applied Multivariate Statistical Analysis*. [S.l.]: Springer, 2007. Citado na página 20.

HARVILLE, D. Matrix algebra from a statistician's perspective springer. *New York*, 1997. Citado na página 20.

HIROSE, H. Maximum likelihood parameter estimation in the extended weibull distribution and its applications to breakdown voltage estimation. *IEEE transactions on dielectrics and electrical insulation*, IEEE, v. 9, n. 4, p. 524–536, 2002. Citado na página 2.

JEFFREY, A.; ZWILLINGER, D. *Table of integrals, series, and products*. [S.l.]: Elsevier, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 34.

JORGENSEN, B. *Statistical properties of the generalized inverse Gaussian distribution*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 9. Citado na página 25.

JOSE, K.; NAIK, S. R. On the q-weibull distribution and its applications. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, Taylor & Francis, v. 38, n. 6, p. 912–926, 2009. Citado 4 vezes nas páginas 2, 5, 6 e 7.

JR, S. P.; MENDES, R.; MALACARNE, L. q-exponential, weibull, and q-weibull distributions: an empirical analysis. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 324, n. 3-4, p. 678–688, 2003. Citado na página 1.



- JR, S. P. et al. q-distributions in complex systems: A brief review. *Brazilian Journal of Physics*, SciELO Brasil, v. 39, n. 2A, p. 468–474, 2009. Citado na página 1.
- KENDALL, M. G. et al. The advanced theory of statistics. vols. 1. *The advanced theory of statistics. Vols. 1.*, Charles Griffin and Co., Ltd., 42 Drury Lane, London, v. 1, n. Ed. 4, 1948. Citado na página 14.
- KOIKE, K.-i.; SHIMEGI, Y. On log-q-gaussian distribution. *Calcutta Statistical Association Bulletin*, SAGE Publications Sage India: New Delhi, India, v. 70, n. 2, p. 105–121, 2018. Citado na página 17.
- LEHMANN, E.; CASELLA, G. Unbiasedness. *Theory of Point Estimation*, Springer, p. 83–146, 1998. Citado na página 20.
- LEHMANN, E. L.; CASELLA, G. *Theory of point estimation*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006. Citado na página 14.
- LI, H.-C. et al. On the empirical-statistical modeling of sar images with generalized gamma distribution. *IEEE Journal of selected topics in signal processing*, IEEE, v. 5, n. 3, p. 386–397, 2011. Citado na página 15.
- MARSHALL, A. W.; OLKIN, I. A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and weibull families. *Biometrika*, Oxford University Press, v. 84, n. 3, p. 641–652, 1997. Citado na página 1.
- MATHAI, A. A pathway to matrix-variate gamma and normal densities. *Linear Algebra and Its Applications*, Elsevier, v. 396, p. 317–328, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 5.
- MATHAI, A.; HAUBOLD, H. J. Pathway model, superstatistics, tsallis statistics, and a generalized measure of entropy. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 375, n. 1, p. 110–122, 2007. Citado na página 5.
- MCQUARRIE, A. D.; TSAI, C.-L. *Regression and time series model selection*. [S.l.]: World Scientific, 1998. Citado na página 2.
- NICOLAS, J.-M. Application de la transformée de mellin: étude des lois statistiques de l'imagerie cohérente version corrigée, janvier 2017. 2005. Citado 4 vezes nas páginas 2, 13, 14 e 15.
- NICOLAS, J.-M.; ANFINSEN, S. N. Introduction to second kind statistics: Application of log-moments and log-cumulants to the analysis of radar image distributions. *Trait. Signal*, Citeseer, v. 19, n. 3, p. 139–167, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 13.
- NOCEDAL, J.; STEPHEN, J. Wright. numerical optimization. *Springer, New York*, v. 2, p. 173–195, 1999. Citado na página 11.
- PAKYARI, R.; BALAKRISHNAN, N. A general purpose approximate goodness-of-fit test for progressively type-ii censored data. *IEEE Transactions on Reliability*, IEEE, v. 61, n. 1, p. 238–244, 2012. Citado na página 2.
- PEARSON, K. X. contributions to the mathematical theory of evolution.—ii. skew variation in homogeneous material. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London.(A.)*, The Royal Society London, n. 186, p. 343–414, 1895. Citado na página 2.

- RAO, C. R. et al. Linear models and generalizations. *Least Squares and Alternatives (3rd edition)* Springer, Berlin Heidelberg New York, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 20, 41 e 42.
- SARTORI, I. et al. Reliability modeling of a natural gas recovery plant using q-weibull distribution. In: *Computer Aided Chemical Engineering*. [S.l.]: Elsevier, 2009. v. 27, p. 1797–1802. Citado na página 2.
- SILVA, S. N. H. d. *Processo de renovação generalizado para análise de sistemas reparáveis baseado na distribuição q-exponencial*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2016. Citado na página 1.
- SILVEIRA, F. V. et al. Normal-g class of probability distributions: Properties and applications. *Symmetry*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 11, n. 11, p. 1407, 2019. Citado na página 1.
- TSALLIS, C.; STATIS, J. Phys., 52 (1988) 479; emf curado, and c. tsallis. *J. Phys. A: Math. Gen*, v. 24, p. L69, 1991. Citado na página 1.
- VASCONCELOS, J. M. et al. The compound truncated poisson cauchy model: A descriptor for multimodal data. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, v. 378, p. 112887, 2020. Citado na página 22.
- WILLIAM, Q. M.; ESCOBAR, L. A. Statistical methods for reliability data. *A. Wiley Interscience Publications*, 1998. Citado na página 25.
- ZOGRAFOS, K.; BALAKRISHNAN, N. On families of beta-and generalized gamma-generated distributions and associated inference. *Statistical Methodology*, Elsevier, v. 6, n. 4, p. 344–362, 2009. Citado na página 1.

# APÊNDICE A – Primeiro Apêndice

## A.1 Função característica para o caso $1 < q < 2$

Por definição,

$$\varphi_1(x) = \int_0^{\infty} e^{itX} f_4(x) dx.$$

Logo, temos:

$$\varphi_1(x) = \alpha \lambda^\alpha (2 - q) \int_0^{\infty} e^{itx} x^{\alpha-1} [1 + (q - 1)(\lambda x)^\alpha]^{-1/q-1} dx.$$

Se considerarmos a expansão  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  (JEFFREY; ZWILLINGER, 2007),  
temos:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \alpha \lambda^\alpha (2 - q) \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(itx)^n}{n!} x^{\alpha-1} [1 + (q - 1)(\lambda x)^\alpha]^{-1/q-1} dx \\ &= \alpha \lambda^\alpha (2 - q) \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n x^n}{n!} x^{\alpha-1} [1 + (q - 1)(\lambda x)^\alpha]^{-1/q-1} dx \\ &= \alpha \lambda^\alpha (2 - q) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \int_0^{\infty} x^n x^{\alpha-1} [1 + (q - 1)(\lambda x)^\alpha]^{-1/q-1} dx. \end{aligned}$$

Assim fazendo uma substituição  $u = (q - 1)(\lambda x)^\alpha$ , temos que:

$$\frac{du}{(q - 1)\lambda^\alpha \alpha} = x^{\alpha-1} dx \text{ e } x = \frac{u^{1/\alpha}}{(q - 1)^{1/\alpha} \lambda}$$

e, desta forma

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(x) &= \alpha \lambda^\alpha (2-q) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \int_0^{\infty} \frac{u^{n/\alpha}}{(q-1)^{n/\alpha} \lambda^n} [1+u]^{-1/q-1} \frac{du}{(q-1) \lambda^\alpha \alpha} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \frac{(2-q)}{\lambda^n (q-1)^{(n/\alpha)+1}} \int_0^{\infty} u^{n/\alpha} [1+u]^{-1/q-1} du \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \frac{(2-q)}{\lambda^n (q-1)^{(n/\alpha)+1}} \int_0^{\infty} \frac{u^{n/\alpha}}{[1+u]^{1/q-1}} du \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \frac{(2-q)}{\lambda^n (q-1)^{(n/\alpha)+1}} \int_0^{\infty} \frac{u^{(n/\alpha+1)-1}}{[1+u]^{(n/\alpha+1)+(1/q-1)-(n/\alpha+1)}} du \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \frac{(2-q)}{\lambda^n (q-1)^{(n/\alpha)+1}} \frac{\Gamma(\frac{n}{\alpha}+1) \Gamma(\frac{1}{q-1} - \frac{n}{\alpha} + 1)}{\Gamma(\frac{1}{q-1})} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \frac{(2-q)}{\lambda^n (q-1)^{(n/\alpha)+1}} \beta \left( \frac{n}{\alpha} + 1, \frac{1}{q-1} - \frac{n}{\alpha} + 1 \right).
 \end{aligned}$$

em que  $\frac{n}{\alpha} + 1$  e  $\frac{1}{q-1} - \frac{n}{\alpha} + 1$  são maiores do que zero.

## A.2 Função característica para o caso $q < 1$

Por definição,

$$\varphi_2(x) = \int_0^{\infty} e^{itX} f_5(x) dx.$$

Portanto, temos:

$$\varphi_2(x) = \alpha \lambda^\alpha (2-q) \int_0^{\infty} e^{itX} x^{\alpha-1} [1 - (1-q)(\lambda x)^\alpha]^{1/1-q} dx.$$

Se  $0 \leq x \leq \frac{1}{(1-q)^{1/\alpha} \lambda} = k$  e analogamente, considerando a expansão  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

(JEFFREY; ZWILLINGER, 2007), podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 \varphi_2(x) &= \alpha \lambda^\alpha (2-q) \int_0^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(itx)^n}{n!} x^{\alpha-1} [1 - (1-q)(\lambda x)^\alpha]^{1/1-q} dx \\
 &= \alpha \lambda^\alpha (2-q) \int_0^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n x^n}{n!} x^{\alpha-1} [1 - (1-q)(\lambda x)^\alpha]^{1/1-q} dx \\
 &= \alpha \lambda^\alpha (2-q) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \int_0^k x^n x^{\alpha-1} [1 - (1-q)(\lambda x)^\alpha]^{1/1-q} dx.
 \end{aligned}$$

Assim fazendo uma substituição  $u = (1-q)(\lambda x)^\alpha$ , temos que:

$$\frac{du}{(1-q)\lambda^\alpha \alpha} = x^{\alpha-1} dx, \quad x = \frac{u^{1/\alpha}}{(1-q)^{1/\alpha} \lambda}$$

e, desta forma

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x) &= \alpha \lambda^\alpha (2-q) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \int_0^1 \frac{u^{n/\alpha}}{(1-q)^{n/\alpha} \lambda^n} [1-u]^{1/1-q} \frac{du}{(1-q) \lambda^\alpha \alpha} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \frac{(2-q)}{\lambda^n (1-q)^{(n/\alpha)+1}} \int_0^1 u^{n/\alpha} [1-u]^{1/1-q} du \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \frac{(2-q)}{\lambda^n (1-q)^{(n/\alpha)+1}} \int_0^1 u^{n/\alpha} [1-u]^{(1/(1-q)+1)-1} du \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \frac{(2-q)}{\lambda^n (1-q)^{(n/\alpha)+1}} \frac{\Gamma(\frac{n}{\alpha} + 1) \Gamma(\frac{1}{1-q} + 1)}{\Gamma(\frac{1}{q-1} + \frac{n}{\alpha} + 2)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \frac{(2-q)}{\lambda^n (1-q)^{(n/\alpha)+1}} \beta \left( \frac{n}{\alpha} + 1, \frac{1}{1-q} + \frac{n}{\alpha} + 2 \right),
\end{aligned}$$

em que  $\frac{n}{\alpha} + 1$  e  $\frac{1}{1-q} + \frac{n}{\alpha} + 2$  são maiores do que zero.

# APÊNDICE B – Segundo Apêndice

## B.1 Transformada de Mellin para q-Weibull $1 < q < 2$

Seja a fdp  $f_4(x) = \alpha\lambda^\alpha(2-q)x^{\alpha-1}[1+(q-1)(\lambda x)^\alpha]^{-1/(q-1)}$ .

Por definição, temos que a Transformada de Mellin é dada por:

$$\begin{aligned}\phi_x(s) &= \int_0^\infty x^{s-1}x^{\alpha-1}\alpha\lambda^\alpha(2-q)[1+(q-1)(\lambda x)^\alpha]^{-1/(q-1)}dx \\ &= \alpha\lambda^\alpha(2-q) \int_0^\infty x^{s-1}x^{\alpha-1}[1+(q-1)(\lambda x)^\alpha]^{-1/(q-1)}dx.\end{aligned}$$

Sendo a substituição  $u = (1-q)(\lambda x)^\alpha$ , temos que:

$$\frac{du}{(1-q)\lambda^\alpha\alpha} = x^{\alpha-1} \cdot dx \quad \text{e} \quad x = \frac{u^{1/\alpha}}{(1-q)^{1/\alpha}\lambda}.$$

E portanto,

$$\begin{aligned}\phi_x(s) &= \alpha\lambda^\alpha(2-q) \int_0^\infty \frac{u^{\frac{s-1}{\alpha}}}{(q-1)^{\frac{s-1}{\alpha}}\lambda^{(s-1)}} [1+u]^{\frac{-1}{q-1}} \frac{du}{(q-1)\lambda^\alpha\alpha} \\ &= \frac{(2-q)}{\lambda^{s-1}(q-1)^{\frac{s-1}{\alpha}+1}} \int_0^\infty u^{\frac{s-1}{\alpha}} [1+u]^{\frac{-1}{q-1}} du \\ &= \frac{(2-q)}{\lambda^{s-1}(q-1)^{\frac{s-1}{\alpha}+1}} \int_0^\infty \frac{u^{\frac{s-1}{\alpha}}}{[1+u]^{\frac{1}{q-1}}} du.\end{aligned}$$

De acordo com as propriedades da função Beta ([ABRAMOWITZ; STEGUN, 1948](#), p. 258):

$$\begin{aligned}\phi_x(s) &= \frac{(2-q)}{\lambda^{s-1}(q-1)^{\frac{s-1}{\alpha}+1}} \int_0^\infty \frac{u^{(\frac{s-1}{\alpha}+1)-1}}{[1+u]^{(\frac{s-1}{\alpha}+1)+\frac{1}{q-1}-\frac{s-1}{\alpha}}}} du \\ &= \frac{(2-q)}{\lambda^{s-1}(q-1)^{(\frac{s-1}{\alpha}+1)}} \frac{\Gamma(\frac{s-1}{\alpha}+1)\Gamma(\frac{1}{q-1}-\frac{s-1}{\alpha}-1)}{\Gamma(\frac{1}{q-1})},\end{aligned}\tag{B.1}$$

em que  $\frac{1}{q-1} - \frac{s-1}{\alpha} - 1 > 0$ .

## B.2 Transformada de Mellin para q-Weibull $q < 1$

Seja a fdp  $f_5(x) = \alpha\lambda^\alpha(2-q)x^{\alpha-1}[1-(1-q)(\lambda x)^\alpha]^{\frac{1}{1-q}}$ .

Por definição, temos que a Transformada de Mellin é dada por:

$$\phi_x(s) = \int_0^\infty x^{s-1} x^{\alpha-1} \alpha \lambda^\alpha (2-q) [1 + (q-1)(\lambda x)^\alpha]^{-1/(q-1)} dx.$$

Sendo  $0 \leq x \leq \frac{1}{(1-q)^{\frac{1}{\alpha}} \lambda} = k$ , temos:

$$\phi_x(s) = \alpha \lambda^\alpha (2-q) \int_0^k x^{s-1} x^{\alpha-1} [1 - (1-q)(\lambda x)^\alpha]^{\frac{1}{1-q}} dx.$$

Considerando a substituição  $u = (1-q)(\lambda x)^\alpha$ , temos que:

$$\frac{du}{(1-q)\lambda^\alpha \alpha} = x^{\alpha-1} dx \text{ e } x = \frac{u^{1/\alpha}}{(1-q)^{1/\alpha} \lambda}.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \phi_x(s) &= \alpha \lambda^\alpha (2-q) \int_0^1 \frac{u^{\frac{s-1}{\alpha}}}{(1-q)^{\frac{s-1}{\alpha}} \lambda^{(s-1)}} [1-u]^{\frac{1}{1-q}} \frac{du}{(1-q)\lambda^\alpha \alpha} \\ &= \frac{(2-q)}{\lambda^{s-1} (1-q)^{\frac{s-1}{\alpha} + 1}} \int_0^1 u^{\frac{s-1}{\alpha}} [1-u]^{\frac{1}{1-q}} du. \end{aligned}$$

Utilizando as propriedades da função Beta ([ABRAMOWITZ; STEGUN, 1948](#), p. 258):

$$\begin{aligned} \phi_x(s) &= \frac{(2-q)}{\lambda^{s-1} (1-q)^{\frac{s-1}{\alpha} + 1}} \int_0^1 u^{(\frac{s-1}{\alpha} + 1) - 1} [1-u]^{(\frac{1}{1-q} + 1) - 1} du \\ &= \frac{(2-q)}{\lambda^{s-1} (1-q)^{(\frac{s-1}{\alpha} + 1)}} \frac{\Gamma(\frac{s-1}{\alpha} + 1) \Gamma(\frac{1}{1-q} + 1)}{\Gamma(\frac{s-1}{\alpha} + \frac{1}{1-q} + 2)}. \end{aligned} \tag{B.2}$$

em que  $\frac{s-1}{\alpha} + \frac{1}{1-q} + 2 > 0$ .

### B.3 Log-Cumulantes para o modelo q-Weibull ( $1 < q < 2$ )

Seja a Transformada de Mellin [B.1](#)

$$\phi_x(s) = \frac{(2-q)}{\lambda^{s-1} (q-1)^{(\frac{s-1}{\alpha} + 1)}} \frac{\Gamma(\frac{s-1}{\alpha} + 1) \Gamma(\frac{1}{q-1} - \frac{s-1}{\alpha} - 1)}{\Gamma(\frac{1}{q-1})}.$$

Para encontrarmos a segunda função característica do segundo tipo  $\psi_x(s)$ , aplicaremos o logaritmo sob  $\phi_x(s)$ :

$$\psi_x(s) = \log \left[ \frac{(2-q)}{\lambda^{s-1} (q-1)^{(\frac{s-1}{\alpha} + 1)}} \frac{\Gamma(\frac{s-1}{\alpha} + 1) \Gamma(\frac{1}{q-1} - \frac{s-1}{\alpha} - 1)}{\Gamma(\frac{1}{q-1})} \right].$$

Utilizando as propriedades do logaritmo,

$$\begin{aligned} \psi_x(s) &= \log(2 - q) - (s - 1) \log(\lambda) - \left( \frac{s-1}{\alpha} + 1 \right) \log(q - 1) + \log \Gamma \left( \frac{s-1}{\alpha} + 1 \right) \\ &+ \log \Gamma \left( \frac{1}{q-1} - \frac{s-1}{\alpha} - 1 \right) - \log \Gamma \left( \frac{1}{q-1} \right). \end{aligned}$$

Derivando  $\psi_x(s)$  para encontrar os log-cumulantes do primeiro tipo, temos:

$$\tilde{k}_1 = -\log(\lambda) - \frac{1}{\alpha} \log(q - 1) + \frac{1}{\alpha} \psi \left( \frac{s-1}{\alpha} + 1 \right) - \frac{1}{\alpha} \psi \left( \frac{1}{q-1} - \frac{s-1}{\alpha} - 1 \right)$$

sendo  $s = 1$ ,

$$\tilde{k}_1 = -\log(\lambda) - \frac{1}{\alpha} \log(q - 1) + \frac{1}{\alpha} \psi(1) - \frac{1}{\alpha} \psi \left( \frac{1}{q-1} - 1 \right).$$

Log-cumulantes do segundo tipo,

$$\tilde{k}_2 = \frac{1}{\alpha^2} \psi^{(1)} \left( \frac{s-1}{\alpha} + 1 \right) + \frac{1}{\alpha^2} \psi^{(1)} \left( \frac{1}{q-1} - \frac{s-1}{\alpha} + 1 \right)$$

com  $s = 1$ ,

$$\tilde{k}_2 = \frac{1}{\alpha^2} \psi^{(1)}(1) + \frac{1}{\alpha^2} \psi^{(1)} \left( \frac{1}{q-1} + 1 \right).$$

Da mesma forma, os log-cumulantes do terceiro tipo,

$$\tilde{k}_3 = \frac{1}{\alpha^3} \psi^{(2)}(1) + \frac{1}{\alpha^3} \psi^{(2)} \left( \frac{1}{q-1} + 1 \right).$$

O  $v$ -ésimo log-cumulante é dado a seguir,

$$\tilde{k}_v = \frac{1}{\alpha^v} \psi^{(v-1)}(1) + (-1)^v \frac{1}{\alpha^v} \psi^{(v-1)} \left( \frac{1}{q-1} + 1 \right).$$

#### B.4 Log-cumulantes para o modelo q-Weibull ( $q < 1$ )

Sendo a Transformada de Mellin [B.2](#)

$$\phi_x(s) = \frac{(2 - q)}{\lambda^{s-1} (1 - q)^{\left(\frac{s-1}{\alpha}\right)+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{\alpha} + 1\right) \Gamma\left(\frac{1}{q-1} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{s-1}{\alpha} + \frac{1}{q-1} + 2\right)},$$

a função característica do segundo tipo, é dada como segue,

$$\begin{aligned} \psi_x(s) &= \log(2 - q) - (s - 1) \log(\lambda) - \left( \frac{s-1}{\alpha} + 1 \right) \log(1 - q) + \log \Gamma \left( \frac{s-1}{\alpha} + 1 \right) \\ &+ \log \Gamma \left( \frac{1}{1-q} + 1 \right) - \log \Gamma \left( \frac{s-1}{\alpha} + \frac{1}{q-1} + 2 \right). \end{aligned}$$



Derivando  $\psi_x(s)$  quando  $s = 1$ , temos os log-cumulantes do primeiro tipo:

$$\tilde{k}_1 = -\log(\lambda) - \frac{1}{\alpha} \log(1 - q) + \frac{1}{\alpha} \psi(1) - \frac{1}{\alpha} \psi\left(\frac{1}{1 - q} + 2\right).$$

De forma análoga, encontramos os log-cumulantes do segundo tipo:

$$\tilde{k}_2 = \frac{1}{\alpha^2} \psi^{(1)}(1) - \frac{1}{\alpha^2} \psi^{(1)}\left(\frac{1}{1 - q} + 2\right),$$

igualmente, os log-cumulantes do terceiro tipo:

$$\tilde{k}_3 = \frac{1}{\alpha^3} \psi^{(2)}(1) - \frac{1}{\alpha^3} \psi^{(2)}\left(\frac{1}{1 - q} + 2\right).$$

Por fim, generalizando, temos o  $v$ -ésimo log-cumulante, dado por:

$$\tilde{k}_v = \frac{1}{\alpha^v} \psi^{(v-1)}(1) - \frac{1}{\alpha^v} \psi^{(v-1)}\left(\frac{1}{1 - q} + 2\right).$$

# APÊNDICE C – Terceiro Apêndice

## C.1 Estatística $T^2$ de Hotelling ( $1 < q < 2$ )

Neste apêndice, forneceremos as expressões para os elementos da matriz assintótica dos LCs estimados. Considere a relação analítica da Equação (3.10),  $M_3$  em (3.15) e  $K_3$  em (3.16). Então, temos:

$$K_3 = J_3^T \cdot M_3 \cdot J_3,$$

com a matriz jacobiana das transformações de momentos para cumulantes dada por (ANFINSEN; DOULGERIS; ELTOFT, 2011)

$$J_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2m & 1 & 0 \\ -3(m_2 - 2m_1^2) & -3m_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

e

$$M_3 = \begin{bmatrix} \tilde{k}_2 & \tilde{k}_3 + 2\tilde{k}_1\tilde{k}_2 & M_{13} \\ \tilde{k}_3 + 2\tilde{k}_1\tilde{k}_2 & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}, \quad (\text{C.2})$$

em que

$$M_{13} = \tilde{k}_4 + 3\tilde{k}_1\tilde{k}_3 + 3\tilde{k}_2^2 + 3\tilde{k}_1^2\tilde{k}_2,$$

$$M_{22} = \tilde{k}_4 + 4\tilde{k}_1\tilde{k}_3 + 2\tilde{k}_2^2 + 4\tilde{k}_1^2\tilde{k}_2$$

$$M_{23} = \tilde{k}_5 + 5\tilde{k}_1\tilde{k}_4 + 9\tilde{k}_2\tilde{k}_3 + 9\tilde{k}_1^2\tilde{k}_3 + 12\tilde{k}_1\tilde{k}_2^2 + 6\tilde{k}_1^3\tilde{k}_2$$

$$M_{33} = \tilde{k}_6 + 6\tilde{k}_1\tilde{k}_5 + 15\tilde{k}_2\tilde{k}_4 + 15\tilde{k}_1^2\tilde{k}_4 + 9\tilde{k}_3^2 + 54\tilde{k}_1\tilde{k}_2\tilde{k}_3 + 18\tilde{k}_1^3\tilde{k}_3 + 15\tilde{k}_2^3 + 36\tilde{k}_1^2\tilde{k}_2^2 + 9\tilde{k}_1^4\tilde{k}_2.$$

Portanto,

$$K_3 = \begin{bmatrix} \tilde{k}_2 & \tilde{k}_3 & \tilde{k}_4 \\ \tilde{k}_3 & \tilde{k}_4 + 2\tilde{k}_2^2 & \tilde{k}_5 + 6\tilde{k}_2\tilde{k}_3 \\ \tilde{k}_4 & \tilde{k}_5 + 6\tilde{k}_2\tilde{k}_3 & \tilde{k}_6 + 9\tilde{k}_2\tilde{k}_4 + 9\tilde{k}_3^2 + 6\tilde{k}_2^3 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.3})$$

Com base na matriz (C.3), derivamos a matriz de covariância assintótica para o modelo  $q$ -Weibull, isto é:

$$K = \begin{bmatrix} \tilde{k}_4 + 2\tilde{k}_2^2 & \tilde{k}_5 + 6\tilde{k}_2\tilde{k}_3 \\ \tilde{k}_5 + 6\tilde{k}_2\tilde{k}_3 & \tilde{k}_6 + 9\tilde{k}_2\tilde{k}_4 + 9\tilde{k}_3^2 + 6\tilde{k}_2^3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha^6} \begin{bmatrix} \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix},$$

em que

$$\begin{aligned}\delta_{22} &= \alpha^2 \left\{ \left[ \psi(3, 1) + \psi\left(3, \frac{1}{q-1} - 1\right) \right] + 2 \left[ \psi^2(1, 1) + \psi^2\left(1, \frac{1}{q-1} - 1\right) \right] \right\}, \\ \delta_{32} &= \alpha \left\{ \left[ \psi(4, 1) - \psi\left(4, \frac{1}{q-1} - 1\right) \right] + 6 \left[ \psi(1, 1) + \psi\left(1, \frac{1}{q-1} - 1\right) \right] \right. \\ &\quad \cdot \left. \left[ \psi(2, 1) - \psi\left(2, \frac{1}{q-1} - 1\right) \right] \right\}, \\ \delta_{33} &= \psi(5, 1) + \psi\left(5, \frac{1}{q-1} - 1\right) + 9 \left[ \psi(1, 1) + \psi\left(1, \frac{1}{q-1} - 1\right) \right] \left[ \psi(3, 1) + \psi\left(3, \frac{1}{q-1} - 1\right) \right] \\ &\quad + 9 \left[ \psi^2(2, 1) - \psi^2\left(2, \frac{1}{q-1} - 1\right) \right] + 6 \left[ \psi^3(1, 1) + \psi^3\left(1, \frac{1}{q-1} - 1\right) \right].\end{aligned}$$

Se  $|K| \neq 0$ , então o inverso da matriz é dada por

$$K^{-1} = \frac{\alpha^6}{\delta_{33}\delta_{22} - \delta_{23}^2} \begin{bmatrix} \delta_{33} & -\delta_{32} \\ -\delta_{23} & \delta_{22} \end{bmatrix}.$$

Caso contrário, aplicamos a inversa generalizada de Moore-Penrose (RAO et al., 2008).

Finalmente, a estatística  $T^2$  de Hotelling é dada por:

$$T_{q-W}^2 = \frac{n\alpha^6}{\delta_{22}\delta_{33} > \delta_{23}^2} [\hat{\delta}_{33}(\hat{k}_2 - \tilde{k}_2)^2 + \hat{\delta}_{22}(\hat{k}_3 - \tilde{k}_3)^2 - 2\hat{\delta}_{23}(\hat{k}_2 - \tilde{k}_2)(\hat{k}_3 - \tilde{k}_3)].$$

### C.2 Estatística $T^2$ de Hotelling ( $q < 1$ )

Com base na matriz (C.3), derivamos a matriz de covariância assintótica para o segundo caso do modelo q-Weibull, isto é:

$$K = \begin{bmatrix} \tilde{k}_4 + 2\tilde{k}_2^2 & \tilde{k}_5 + 6\tilde{k}_2\tilde{k}_3 \\ \tilde{k}_5 + 6\tilde{k}_2\tilde{k}_3 & \tilde{k}_6 + 9\tilde{k}_2\tilde{k}_4 + 9\tilde{k}_3^2 + 6\tilde{k}_2^3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha^6} \begin{bmatrix} \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix}$$

em que

$$\begin{aligned}\delta_{22}^* &= \alpha^2 \left\{ \left[ \psi(3, 1) - \psi\left(3, \frac{1}{1-q} + 2\right) \right] + 2 \left[ \psi^2(1, 1) - \psi^2\left(1, \frac{1}{1-q} + 2\right) \right] \right\}, \\ \delta_{32}^* &= \alpha \left\{ \left[ \psi(4, 1) - \psi\left(4, \frac{1}{1-q} + 2\right) \right] + 6 \left[ \psi(1, 1) - \psi\left(1, \frac{1}{1-q} + 2\right) \right] \right. \\ &\quad \cdot \left. \left[ \psi(2, 1) - \psi\left(2, \frac{1}{1-q} + 2\right) \right] \right\}, \\ \delta_{33}^* &= \psi(5, 1) - \psi\left(5, \frac{1}{1-q} + 2\right) + 9 \left[ \psi(1, 1) - \psi\left(1, \frac{1}{1-q} + 2\right) \right] \left[ \psi(3, 1) - \psi\left(3, \frac{1}{1-q} + 2\right) \right] + \\ &\quad + 9 \left[ \psi^2(2, 1) - \psi^2\left(2, \frac{1}{1-q} + 2\right) \right] + 6 \left[ \psi^3(1, 1) - \psi^3\left(1, \frac{1}{1-q} + 2\right) \right].\end{aligned}$$

Se  $|K| \neq 0$ , então o inverso da matriz é dada por

$$K^{-1} = \frac{\alpha^6}{\delta_{33}^*\delta_{22}^* - \delta_{23}^{*2}} \begin{bmatrix} \delta_{33}^* & -\delta_{32}^* \\ -\delta_{23}^* & \delta_{22}^* \end{bmatrix}.$$

Caso contrário, aplicamos a inversa generalizada de Moore-Penrose (RAO et al., 2008). Finalmente, a estatística  $T^2$  de Hotelling é dada por:

$$T_{q-w}^2 = \frac{n\alpha^6}{\delta_{22}^*\delta_{33}^* - \delta_{23}^{*2}} [\hat{\delta}_{33}^*(\hat{k}_2 - \tilde{k}_2)^2 + \hat{\delta}_{22}^*(\hat{k}_3 - \tilde{k}_3)^2 - 2\hat{\delta}_{23}^*(\hat{k}_2 - \tilde{k}_2)(\hat{k}_3 - \tilde{k}_3)].$$

Abaixo, temos os algoritmos para a estatística  $T^2$  de Hotelling. De acordo com (3.15), obteremos inicialmente as estimativas de  $\hat{k}_2$  e  $\hat{k}_3$ , posteriormente, a matriz  $K_3^{-1}$ .

---

**Algoritmo 1** Computando  $\hat{k}_2$  e  $\hat{k}_3$

---

[Passo 1:] Considere o vetor de parâmetros  $\hat{\theta} = [\alpha \quad \lambda \quad q]^T$

[Passo 2:] Compute os três primeiros LCs e os três primeiros momentos;

[Passo 3:] Derive estimativas para  $\hat{\theta}$  resolvendo o sistema de equações, utilizando a função 'BBSolve';

[Passo 4:] Derive estimativas para  $\tilde{k}_2$  e  $\tilde{k}_3$  baseados em  $\hat{k}_v = g_v(\hat{m}_1, \dots, \hat{m}_v)$

---



---

**Algoritmo 2** Computando  $K_3^{-1}$

---

[Passo 1:] Compute a matriz  $J_3$  de acordo com (C.1);

[Passo 2:] Compute a matriz  $M_3$  de acordo com (C.2);

[Passo 3:] Compute  $K_3^{-1} = \hat{J}_3^T \hat{M}_3 \hat{J}_3$ ;

[Passo 4:] Se  $\hat{K}_3$  é não singular, compute  $\hat{K}_3^{-1}$  pela inversão usual, caso contrário, compute a inversa generalizada de  $\hat{K}_3$ .

---

Com as saídas dos algoritmos 1 e 2, as estatísticas podem ser encontradas através da manipulação algébrica implícita em (3.15).