

Luisa Matos de Barros Correia

**MODELAGEM E PREVISÃO DO RISCO DE
MERCADOS COM O USO DO VAR**

Recife

27 de fevereiro de 2018



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA

MODELAGEM E PREVISÃO DO RISCO DE MERCADOS COM O USO DO VAR

Dissertação julgada adequada para obtenção do título de Mestre em Biometria e Estatística Aplicada, defendida e aprovada por unanimidade em 27/02/2018 pela comissão examinadora

Área de concentração: Biometria e Estatística Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Tiago Alessandro Espínola Ferreira

Recife

27 de fevereiro de 2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Nome da Biblioteca, Recife-PE, Brasil

B277m Barros Correia, Luisa Matos de
Modelagem e previsão do risco de mercados com o uso do VaR / Luisa Matos de
Barros Correia. – 2018.
49 f. : il.

Orientador: Tiago Alessandro Espínola Ferreira.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco,
Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada, Recife, BR-PE,
2018.

Inclui referências.

1. Value-at-Risk 2. Distribuição (Teoria da probabilidade) 3. Mercado Financeiro
I. Ferreira, Tiago Alessandro Espínola, orient. II. Título

CDD 574.018

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA

MODELAGEM E PREVISÃO DO RISCO DE MERCADOS COM O USO DO VAR

Luisa Matos de Barros Correia

Dissertação julgada adequada para obtenção do título de Mestre em Biometria e Estatística Aplicada, defendida e aprovada por unanimidade em 27/02/2018 pela comissão examinadora

Orientador:

**Prof. Dr. Tiago Alessandro Espínola
Ferreira**
**Universidade Federal Rural de
Pernambuco**

Banca examinadora:

Prof. Dr. Moacyr Cunha Filho
**Universidade Federal Rural de
Pernambuco**

Prof. Dr. Francisco de Sousa Ramos
Universidade Federal de Pernambuco

Dedico, não só esse trabalho, mas todas as minhas conquistas aos meus pais, e irmãos, por se constituírem diferentemente enquanto pessoas, igualmente belos e admiráveis em essência, estímulos que me impulsionaram a buscar vida nova a cada dia, meus agradecimentos por terem aceitado se privar de minha companhia pelos estudos, concedendo a mim a oportunidade de me realizar ainda mais.

Agradecimentos

Nesses anos de mestrado diversas pessoas foram importantes para o desenvolvimento desse trabalho. E, sem dúvida, eu tive sorte de ser abençoada por uma família que sempre me apoiou e por grandes amigos que sempre estiveram ao meu lado.

Primeiramente a Deus que está sempre comigo me iluminando e dando forças para seguir em frente, e por ter colocado essas pessoas maravilhosas na minha vida

Aos meus queridos pais Carlos e Luisa, que sempre se esforçaram para poder me dar condições de estudar, sempre me cobraram bastante fazendo com que eu conseguisse superar os obstáculos da vida, sempre estiveram prontos pra me dar apoio e amor quando eu precisei pelo suporte que me deram em todos os momentos difíceis, pelos conselhos e por sempre acreditarem em mim, mesmo quando nem eu acreditava. Sem eles não teria chegado onde cheguei. São eles as minhas referências para eu me tornar uma mulher digna. Aos meus irmãos Carlos e Leonardo, que por muitas vezes me fizeram sorrir quando o que eu mais queria era chorar e são, sem dúvida, os meus melhores amigos.

As minhas queridas cunhadas Fábria e Lívyia, que são as irmãs que eu outrora não tinha, e que agora compõem essa grande família, e que me apoiaram quando eu precisei. Aos meus sobrinhos Victor e Léo (minha dupla sertaneja), os meninos mais lindos de todos os multiversos.

Ao meu namorado Gabriel, por ser minha fonte inesgotável de alegria e amor por estar ao meu lado sempre. Por me segurar quando minhas asas se esqueceram como voar, por ser amante, melhor amigo, companheiro, por ser tudo e muito mais do que sempre sonhei. Agradeço também a minha “*sogritcha*” querida que foi minha segunda mãe durante toda essa jornada, aconselhando, reclamando, quando preciso, enfim sendo mãe.

Aos meus professores, verdadeiros mestres, que me ensinaram a compreender e enxergar a beleza e a poesia da estatística e me passaram tantos conhecimentos, os quais levarei comigo até o fim.

Ao meu orientador Prof. Tiago Alessandro Espínola Ferreira pela amizade, tranquilidade, apoio e pelos conselhos extremamente importantes não só para a construção desse documento, mas para minha construção como pesquisadora. Como também, pelo incentivo, simpatia e presteza no auxílio e discussões sobre o andamento e normatização desta Dissertação, sem o qual eu não teria conseguido concluir o curso. Que com sua

vocação inequívoca, não poupou esforços como interlocutor dos alunos, e seus orientandos, e por suprir eventuais falhas e lacunas. Com ele aprendi que devemos acreditar em nós mesmos e em nosso trabalho, buscando sempre alcançar a excelência acadêmica de forma ética. Ressalto que qualquer falha que tenha nesse trabalho é de única e exclusiva responsabilidade minha.

Aos colegas de classe pela espontaneidade e alegrias na troca de informações e materiais numa rara demonstração de amizade e solidariedade.

Aos meus melhores e mais especiais amigos Ikaro, Karla e Jéssika (em ordem alfabética para ninguém ficar com raiva), que fizeram a minha passagem pelo mestrado ainda mais inesquecível. Sempre companheiros e junto de mim em todo momento que precisei, e souberam sempre que a recíproca sempre foi, é e será verdadeira. Muito mais que conhecimentos científicos, compartilhamos vida e sentimentos que só a verdadeira amizade permite.

Não posso esquecer de agradecer especialmente ao Jader Jale por sua presteza e disponibilidade para dirimir minhas dúvidas e me permitindo assim concluir esse trabalho. E que essa parceria ainda possa durar muito.

E finalmente a todos os meus amigos e familiares que sempre me apoiaram e que sem eles a minha felicidade não seria completa; em especial aos meus novos tios Marisa, Marliete e Jaciel, por me receberem com muito carinho sempre e fazerem eu me sentir da família.

Muito obrigada a todos!

*"Os eventos futuros projetam sua sombra muito antes."
(Marco Túlio Cícero)*

Resumo

O presente trabalho visa identificar se o pressuposto de normalidade que é usado para o cálculo do VaR (sigla em inglês para Valor em Risco) é válido, ou se a Função de Distribuição Probabilidade de Laplace é mais adequada em mercados reais. Tal identificação será feita através do teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov (KS). Observou-se que a Distribuição de Laplace teve melhor aderência, em detrimento da Distribuição Normal. Assim, calculou-se o VAR utilizando os parâmetros da Distribuição de Laplace. O modelo de previsão de séries temporais ARIMA (Auto Regressivo Integrado de Média Móvel), aplicado aos valores calculados pelo VaR considerando a distribuição de Laplace, foi capaz de modelar a dinâmica temporal do comportamento de risco estimado para os mercados. Foi utilizado o Erro Percentual Médio Absoluto (MAPE) como medida de adequação do modelo ARIMA aos dados. Os experimentos foram realizados com 25 índices mundiais, entre eles: BVSP (IBOVESPA - Brasil), CSE (COLOMBO IND ALL SHS - Sri Lanka), DJI (Dow Jones Industrial Average - EUA), FCHI (CAC 40 - França), MXX (IPC - México), N225 (Nikkei 225 - Japão) e XU100.IS (BIST 100 - Turquia). O único índice que rejeitou mais de 10% dos dados quando considerado a Distribuição de Laplace foi o XU100.IS (BIST 100 - Turquia), tendo obtido um valor de MAPE de 31,98%, seguido do XMI (NYSE ARCA MAJOR MARKET INDEX - USA) com o valor de 28,59%.

Palavras-chaves: *Value-at-Risk*, Funções de Distribuição de Probabilidade, Mercado Financeiro.

Abstract

The purpose of this paper is to identify whether the normality assumption that is used to calculate the Value at Risk (VaR) is valid, or if the Laplace Probability Distribution Function is more appropriate in real markets. Such identification is done through adherence Kolmogorov-Smirnov test (KS). It was observed that Laplace Distribution had better adhesion, in detriment of Normal Distribution. Thus, the VAR was calculated using the Laplace Distribution parameters. The ARIMA time series prediction model (Auto Regressive Integrated Moving Average), applied to the values calculated by the VaR considering the Laplace distribution, was able to model the temporal dynamics of the estimated risk behavior for the state markets. It used the error Average Percentage Absolute (MAPE) as a measure of adequacy of the ARIMA model to the data. The experiments were carried out with 25 indices worldwide, including: BVSP (IBOVESPA - Brazil), CSE (COLOMBO IND ALL SHS - Sri Lanka), DJI (Dow Jones Industrial Average - USA), FCHI IPC - Mexico), N225 (Nikkei 225 - Japan) and XU100.IS (BIST 100 - Turkey). The single index to reject more than 10% of the data when considered Laplace distribution was XU100.IS (BIST 100 - Turkey), obtaining one ASM value of 31.98%, followed by XMI (NYSE ARCA market index MAJOR USA) with a value of 28.59%.

Key-words: *Value-at-Risk*, Probability Distribution Functions, Financial Market.

Lista de Figuras

Figura 1 – Ilustração do funcionamento da Análise das Janelas Móveis	15
Figura 2 – Série de fechamento do CAC 40	24
Figura 3 – Série de retornos do CAC 40	24
Figura 4 – Adequação da série de retornos da CAC 40 as distribuições Normal(a) e de Laplace(b)	25
Figura 5 – Histograma da série de retornos do CAC 40 e ajuste das distribuições Normal e Laplace	26
Figura 6 – Valores do VaR Laplaciano e índice de rejeição do CAC 40	26
Figura 7 – Gráfico de série temporal dos valores calculados do VaR e modelo ARIMA (em vermelho) com sua previsão e intervalos de confiança para o CAC 40	27
Figura 8 – Série de fechamento do DJI	28
Figura 9 – Série de retornos do DJI	28
Figura 10 – Adequação da série de retornos da DJI as distribuições Normal e de Laplace	29
Figura 11 – Histograma da série de retornos do DJI e ajuste das distribuições Normal e Laplace	30
Figura 12 – Valores do VaR Laplaciano e índice de rejeição do DJI	30
Figura 13 – Gráfico de série temporal dos valores calculados do VaR e modelo ARIMA (em vermelho) com sua previsão e intervalos de confiança para o DJI	31
Figura 14 – Série de fechamento da IBOVESPA	32
Figura 15 – Série de retornos do IBOVESPA	32
Figura 16 – Adequação da série de retornos da IBOVESPA as distribuições Normal e de Laplace	33
Figura 17 – Histograma da série de retornos do IBOVESPA e ajuste das distribuições Normal e Laplace	34
Figura 18 – Valores do VaR Laplaciano e índice de rejeição do IBOVESPA	34
Figura 19 – Gráfico de série temporal dos valores calculados do VaR e modelo ARIMA (em vermelho) com sua previsão e intervalos de confiança para a IBOVESPA	35
Figura 20 – Série de fechamento do MXX	36

Figura 21 – Série de retornos do MXX	36
Figura 22 – Adequação da série de retornos da MXX as distribuições Normal e de Laplace	37
Figura 23 – Histograma da série de retornos do MXX e ajuste das distribuições Normal e Laplace	38
Figura 24 – Valores do VaR Laplaciano e índice de rejeição do MXX	38
Figura 25 – Gráfico de série temporal dos valores calculados do VaR e modelo ARIMA (em vermelho) com sua previsão e intervalos de confiança para o MXX	39
Figura 26 – Série de fechamento do N225	40
Figura 27 – Série de retornos do N225	40
Figura 28 – Adequação da série de retornos da N225 as distribuições Normal e de Laplace	41
Figura 29 – Histograma da série de retornos do N225 e ajuste das distribuições Normal e Laplace	41
Figura 30 – Valores do VaR Laplaciano e índice de rejeição do N225	42
Figura 31 – Gráfico de série temporal dos valores calculados do VaR e modelo ARIMA (em vermelho) com sua previsão e intervalos de confiança para o N225	43

Lista de tabelas

Tabela 1 – Estatística da série de fechamento da CAC 40	25
Tabela 2 – Estatística da série de retornos CAC 40	25
Tabela 3 – Critérios de seleção de Modelos da CAC 40	25
Tabela 4 – Estatística da série de fechamento do DJI	28
Tabela 5 – Estatística da série de retornos do DJI	28
Tabela 6 – Critérios de seleção de Modelos da DJI	29
Tabela 7 – Estatística da série de fechamento do IBOVESPA	32
Tabela 8 – Estatística da série de retornos do IBOVESPA	32
Tabela 9 – Critérios de seleção de Modelos da IBOVESPA	33
Tabela 10 – Estatística da série de fechamento do MXX	36
Tabela 11 – Estatística da série de retornos MXX	36
Tabela 12 – Critérios de seleção de Modelos da MXX	37
Tabela 13 – Estatística da série de fechamento da N225	40
Tabela 14 – Estatística da série de retornos N225	40
Tabela 15 – Critérios de seleção de Modelos da N225	40
Tabela 16 – Modelos ARIMAS para os vinte e cinco índices das bolsas	44

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Objetivos	2
1.2	Estrutura da dissertação	2
2	Revisão de Literatura	4
2.1	Conceito de Valor	4
2.2	Dinheiro e Moeda	6
2.2.1	Evolução do Sistema de Pagamentos	7
2.3	Mercado de Títulos e Mercado de Ações	7
2.4	Bolsa de Valores	8
2.4.1	Índices de Bolsas de Valores	9
2.5	Risco Financeiro	9
2.6	Séries Temporais	10
2.6.1	Séries Financeiras	10
2.7	VaR - Value at Risk	11
2.7.1	VaR paramétrico	12
2.7.2	VaR histórico	12
2.7.3	VaR de Monte Carlo	13
3	Metodologia	14
3.1	Análise em Janelas Móveis (<i>Sliding Window Analysis – SWA</i>)	14
3.2	Teste de Aderência de Kolmogorov-Smirnov	15
3.3	Cálculo do VaR paramétrico	17
3.3.1	Distribuição Normal	17
3.3.2	Distribuição de Laplace	18
3.3.3	Escolha das Distribuições	18
3.4	Crítério de Informação de Akaike e Critério de Informação Bayesiano	19
3.5	Identificação e Aplicação do Modelo	20
3.6	Modelo ARIMA (Auto Regressivo Integrado de Média Móvel) para Previsões de Séries Temporais	20
3.6.1	Avaliação do desempenho de previsões	21
3.7	Software	22
3.8	Aquisição e Tratamento dos dados	22
4	Resultados	24

4.1 Estatística Descritiva	24
4.2 Outros índices	43
5 Conclusão	45
5.1 Trabalhos Futuros	46
Referências Bibliográficas	47

1 Introdução

Risco é a probabilidade de experimentar resultados diferentes do que se espera. No contexto financeiro, essa probabilidade é expressa pela possível perda de dinheiro devido à uma exposição ao mercado (JORION, 2003).

A volatilidade de séries financeiras assume um papel muito importante na avaliação de ativos financeiros, onde a sua especificação e a sua medida têm sido amplamente estudadas. Um dos vários instrumentos que tentam realizar a previsão do risco é o VaR – *Value-at-Risk* – uma medida de risco financeiro que visa indicar qual é a perda máxima esperada para um portfólio, dado um determinado nível de confiança.(JORION, 2003) Ainda segundo Jorion (2003), a principal vantagem do VaR é que ele resume em um único número a medida de risco, tornando assim um índice fácil de se entender. Esta simplicidade é a força e fraqueza do VaR, pois ao resumir o risco em um único número, torna-se uma poderosa ferramenta de comunicação.

A eficiência do VaR está intimamente relacionada com a distribuição de probabilidade da variável a ser analisada. Assim, o conhecimento da correta distribuição de probabilidade como um todo, e especialmente seus valores extremos, ganham importância ainda maior em épocas de instabilidade dos mercados, pois são esses eventos extremos que irão modificar as caudas da distribuição (SOUZA, 1999).

Segundo Alarcon et al. (2005), os principais modelos de risco utilizados para calcular o VaR, é o modelo de Simulação Histórica, Paramétrica e modelos de Simulação de Monte Carlo. Contudo, o cômputo do VaR muitas vezes é feito de modo a pressupor normalidade, especialmente para portfólios grandes e diversificados, como afirma Jorion (2003), com o objetivo de simplificar seu cálculo. Tal simplificação pode levar à subestimação ou sobre-estimação do risco, caso estejamos considerando uma distribuição de probabilidade errônea.

A literatura acadêmica, a respeito do ajuste de distribuição de probabilidade para cômputo do VaR, é razoavelmente vasta, compreendendo as mais diversas abordagens. Assim, é possível citar trabalhos como Bali (2003) que propõe uma abordagem de distribuição de valores extremos para a estimativa do VaR, demonstrando que a teoria estatística de extremos propicia estimativas mais corretas para a gestão do risco.

Seguindo também a teoria dos extremos, Danielsson e Vries (2000) argumentam

que as estimativas do VaR são muito dependentes de boas predições a respeito de eventos incomuns e catastróficos, daí a importância de boas estimativas para as caudas das distribuições. Nesse contexto, os autores utilizam um método semi-paramétrico para a estimativa do VaR que é uma mistura dessas duas abordagens, onde se combinam simulação histórica não-paramétrica e estimação paramétrica das caudas da distribuição de retorno, a fim de estimar com precisão as caudas de uma distribuição.

Quando surgem as crises financeiras, a necessidade de instrumentos que possam gerir o risco com maior acurácia, se torna mais latente, e tem grande importância para a manutenção da saúde do sistema financeiro. São esses instrumentos que possibilitarão as instituições financeiras terem um bom desempenho e conseqüentemente honrarem seus compromissos.

1.1 Objetivos

Esse trabalho tem como objetivo testar a aderência as distribuições Normal e de Laplace de vinte e cinco índices financeiros, calculando o risco deste ativo através do VaR paramétrico, tendo em vista a melhor distribuição de probabilidade teórica encontrada após a realização do teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov juntamente com a análise de critério de seleção de modelos, como o AIC e o BIC, testando assim a eficácia do pressuposto de normalidade ou do pressuposto de *laplacidade* (abusando um pouco da notação).

A seguir estão listados os objetivos específicos desse trabalho:

- Estudar e implementar computacionalmente o modelo VaR;
- Levantar as séries temporais dos mercados financeiros mundiais (inclusive o brasileiro – BOVESPA);
- Comparar as distribuições Normal e Laplace para o ajuste dos retornos financeiros das séries dos mercados mundiais;

1.2 Estrutura da dissertação

A dissertação está estruturada da seguinte forma, no Capítulo 1, uma breve introdução sobre o problema proposto é apresentada, bem como quais objetivos a serem alcançados com os estudos e pesquisas realizadas. No Capítulo 2 será apresentados os vários conceitos que se fazem necessários para a compreensão do estudo apresentado. O Capítulo

3 traz qual a metodologia utilizada para coleta e tratamentos dos dados, bem como qual foram os passos utilizados para a realização do trabalho, e ainda o software utilizado para o cálculo dos resultados apresentados. O Capítulo 4 são mostrados os resultados obtidos com a pesquisa, detalhando-se os seguintes índices, IBovespa (Brasil), DJI (EUA), CAC 40 (França), IPC (México) e Nikkei (Japão), os demais índices tiveram seus resultados expostos em uma tabela no final do capítulo. O Capítulo 5 traz as conclusões do trabalho e propostas para trabalhos futuros.

2 Revisão de Literatura

Antes de falar sobre o Mercado de Ações, Bolsa de Valores e Funções de Distribuição de Probabilidade, faz-se necessário entender alguns conceitos econômicos e estatísticos que permeiam esse assunto.

2.1 Conceito de Valor

O dicionário define o significado econômico de valor como *“Título negociável na bolsa; Maior ou menor apreço que um indivíduo tem por determinado bem ou serviço, e que pode ser de uso ou de troca”* (FERREIRA; FERREIRA; ANJOS, 2004).

O valor de algo, seja abstrato ou concreto, está intrinsecamente ligado a utilidade que isso tem para quem está avaliando. A mensuração desse valor sofre uma grande influência da cultura, lugar e situação em que se encontra a pessoa. O valor pode ser econômico ou “sentimental”, sendo este último geralmente imensurável. O valor econômico advém da importância dada ao bem ou serviço, seja com finalidade pessoal ou de troca.

Para definir como surge e em que se sustenta esse conceito aparecem as escolas do pensamento econômico: A Teoria Objetiva do Valor, sustentada pelos clássicos; e a Teoria Subjetiva do Valor, defendida pelo Neoclássicos. Porém antes mesmo dos clássicos, o filósofo grego Aristóteles já versava em seus livros Política e Ética a Nicômaco o conceito de valor.

Aristóteles faz em seu livro, Ética a Nicômaco, distinção fundamental entre dois objetivos que perpassam a esfera da troca. Para o filósofo há uma distinção fundamental entre a troca com vistas à satisfação dos interesses da casa (*oikos*), que comumente se denomina economia, e a troca com vistas à obtenção de lucro, isto é, esta tem por fim último o acúmulo de dinheiro e não a satisfação das necessidades humanas.

Cada coisa que possuímos tem dois usos, dos quais nenhum repugna a sua natureza; porém, um é próprio e conforme a sua destinação, outro desviado para algum outro fim. Por exemplo, o uso próprio de um sapato é calçar; podemos também vendê-lo ou trocá-lo para obter dinheiro ou pão, ou alguma outra coisa, isto sem que ele mude de natureza; mas este não é o seu uso próprio, já que ele não foi inventado para o comércio. O mesmo acontece com as outras coisas que possuímos. A natureza não as

fez para serem trocadas, mas, tendo os homens uns mais, outros menos do que precisam, foram levadas por este acaso à troca (TOLENS, 2001).¹

Qualificando ambos os tipos de troca, Aristóteles toma a primeira como sendo natural e a segunda como sendo não natural. Ou seja, é natural que os homens se relacionem como portadores de mercadorias, pois pode aprazer e ser útil permutar um bem que se tem em demasia e cuja posse já não serve mais para satisfazer quaisquer desejos e necessidades por um outro bem pertencente a outrem, que porventura porte essa utilidade, cuja aquisição seja vital para o bem viver de um determinado indivíduo ou comunidade.

Dada agora que as mercadorias possuem um valor determinado, condição *sine qua non* para que haja a troca, faz-se necessário um meio para que tais trocas sejam facilitadas, sobre isso Aristóteles dispõe:

E quanto às trocas futuras — a fim de que, se não necessitamos de uma coisa agora, possamos tê-la quando ela venha a fazer-se necessária —, o dinheiro é, de certo modo, a nossa garantia, pois devemos ter a possibilidade de obter o que queremos em troca do dinheiro. Ora, com o dinheiro sucede a mesma coisa que com os bens: nem sempre tem ele o mesmo valor; apesar disso, tende a ser mais estável. Daí a necessidade de que todos os bens tenham um preço marcado; pois assim haverá sempre troca e, por conseguinte, associação de homem com homem. Deste modo, agindo o dinheiro como uma medida, torna ele os bens comensuráveis e os equipara entre si; pois nem haveria associação se não houvesse troca, nem troca se não houvesse igualdade, nem igualdade se não houvesse comensurabilidade. Ora, na realidade é impossível que coisas tão diferentes entre si se tornem comensuráveis, mas com referência à procura podem tornar-se tais em grau suficiente. Deve haver, pois, uma unidade, estabelecida por comum acordo (por isso se chama ela dinheiro); pois é ela que torna todas as coisas comensuráveis, já que todas são medidas pelo dinheiro (PESSANHA, 1991).²

Tal discussão, sobre o valor de uma mercadoria, era porém viesada, pois Aristóteles vivia em uma sociedade escravocrata, não vendo assim o trabalho como um fator determinante para o valor da mercadoria. Então os economistas clássicos, tais como Adam Smith e David Ricardo, Jean-Baptiste Say, John Stuart Mill e Karl Marx, desenvolveram uma concepção mais sistematizada e completa do valor da mercadoria, devido ao momento histórico em que produziram suas teses, a época do capitalismo, na qual a produção de mercadorias se generalizou, transformando até mesmo a força de trabalho em uma mercadoria. Tudo que se produz em forma de mercadoria é fruto direto ou indireto de trabalho humano (SINGER, 2002).

¹ Tradução do livro *Política* escrito por Aristóteles de Pedro Constantin Tolens

² Tradução do livro *Ética a Nicômano* escrito por Aristóteles de Leonel Vallandro e Gerd Bornheim da versão inglesa de W. D. Ross

A teoria do valor da mercadoria, desenvolvida por Karl Marx, que a define como sendo portadora, simultaneamente, de valor de uso e valor de troca, cuja determinação do último se encontra no tempo de trabalho socialmente necessário para produzir a mercadoria. Assim, ele criou sua própria teoria do valor-trabalho, ou lei do valor, a partir de críticas às ideias dos economistas clássicos (principalmente Adam Smith e David Ricardo). Porém todos concordavam que o conceito de valor se desdobra em “valor de uso” e “valor de troca”, sendo o primeiro a utilidade particular que tem para um indivíduo e o segundo o reconhecimento, por parte da coletividade, deste valor. Sustentando-se assim na quantidade de trabalho nele incorporado. Em relação a medir o valor, os clássicos, em geral, achavam que o número de horas de trabalho empregado na confecção ou o poder de compra em trabalho podia medir este valor, embora concordassem nas dificuldades práticas disto.

A teoria subjetiva, desenvolvida pelos neoclássicos, entre eles William Stanley Jevons, Carl Menger, Eugen von Böhm-Bawerk, Alfred Marshall e Knut Wicksell, diz que o valor é um conceito subjetivo e abstrato a respeito da importância que os bens têm para os indivíduos. Assim o trabalho necessário para elaborar um bem não é decisivo na determinação de seu valor. Os neoclássicos utilizam o conceito de valores relativos de troca, que é a relação de troca entre duas mercadorias (Jevons) ou a relação de troca entre uma mercadoria em particular e uma unidade padrão ou a moeda (Marie-Ésprit-Léon Walras). É uma teoria que supõe que a decisão final sobre o valor é dos consumidores, mas apresenta vários pontos fracos, na medida em que se afasta da realidade capitalista. (SINGER, 2002)

2.2 Dinheiro e Moeda

Dinheiro é um dos tópicos de estudo centrais na economia e está numa ligação implícita com o campo das finanças. A quantidade de dinheiro numa dada economia diretamente afeta fenômenos como a inflação e a taxa de juros. Uma crise monetária pode ter efeitos significativos, particularmente se ela levar a uma falência generalizada tal que resulte na adoção de economia de trocas.

Segundo Singer (2002) o que o povo entende por dinheiro e o que os especialistas entendem por dinheiro são coisas diferentes. Para os economistas, moeda, tem um significado bastante específico; sendo definido como qualquer coisa que seja aceita para pagamento de bens e/ou serviços ou no pagamento final de dívidas.

A economia moderna também enfrenta a dificuldade em decidir o que exatamente é moeda, seja ela conchas, pedras, sal, ouro, papel, ela tem que ter três características essenciais: ser um meio de troca, uma unidade contábil a qual já se referia Aristóteles,

e servir para acumular valores. Muitos bens ou símbolos possuem as três características enumeradas acima, porém apenas o dinheiro possui as três juntas. Além disso, para funcionar bem numa economia o dinheiro deve ter as seguintes características adicionais ter valor estável, ser de difícil falsificação, ser facilmente repartível e transportável, ter um valor padronizado e reprodutível.

A origem da moeda em grande parte se explica pela dificuldade em generalizar as trocas sem dinheiro. Para que haja troca direta, é preciso um encontro de necessidades coincidentes, o que não é fácil de ocorrer (SINGER, 2002).

A necessidade por moeda é tão forte que quase toda sociedade, exceto as mais primitivas, a inventa. Para que algo funcione bem como moeda ela deve seguir alguns critérios, dentre os quais podemos destacar: ser facilmente padronizável, simplificando a determinação de seu valor, deve ser amplamente aceita, facilmente divisível, fácil de carregar e não deve se deteriorizar facilmente.

Como já supracitado O dinheiro já foi desde o sal, donde vem o nome salário, conchas, moedas cunhadas em metais preciosos, cujo o valor era tanto quanto se tinha de metal, até chegar aos formatos atuais. Segundo Singer (2002) houve todo tipo de moedas materiais, mas a principal e que prevalece até hoje, é o ouro ou a prata. Hoje moedas e papel valem seu valor de face, e até mesmo dinheiro eletrônico, que não existe no mundo concreto. Que será nosso objeto de estudo, pois ele é a moeda de troca do mercado de ações.

2.2.1 Evolução do Sistema de Pagamentos

O sistema de pagamentos vem evoluindo através dos séculos, e com ele a forma de moeda. Já tivemos o mercado de trocas como sistema de pagamentos, em certo momento os metais preciosos, como o ouro, eram usados principal meio de pagamento e forma de moeda, passamos para a era do papel, onde cheques e papel moeda começaram a ser usados como meio de pagamento e moeda, e estamos caminhando para o mercado eletrônico. Entender para onde o mercado de pagamento esta indo, tem vital importância no entendimento de como a moeda será definida no futuro. O desenvolvimento de tecnologia de computador de baixo custo, significa que estamos evoluindo para o advento da moeda eletrônica.

2.3 Mercado de Títulos e Mercado de Ações

Embora as ações também sejam títulos, sendo sua principal diferença que as ações tem rendimento variável enquanto os títulos em geral tem rendimento fixo. Um título é um direito sobre uma receita futura, sendo esse mercado importante para a atividade

econômica, pois possibilita as empresas a financiarem suas atividades. Já as ações, é um título que implica direito sobre os ganhos e os ativos de uma empresa, como já mencionado, por elas serem de rendimento variável, os ganhos ou perdas do acionista depende diretamente do desempenho da empresa no mercado acionário.

2.4 Bolsa de Valores

Bolsa de valores é o nome dado a um mercado organizado onde se negociam ações de sociedades de capital aberto (públicas ou privadas) e outros valores mobiliários, tais como as opções.

Não são muito precisas as referências que se podem fazer a instituições que com rigor se possam considerar antecedentes das atuais bolsas. De fato, desde que a atividade econômica começou a implicar um volume de trocas significativo, verificou-se a existência de lugares com característica de feira onde comerciantes e mercadores se reuniam (MORAIS, 1989).

Uma Bolsa de Valor pode ser organizada na forma de uma sociedade civil sem fins lucrativos, que mantém o local ou o sistema de negociação eletrônico adequado à ação de transações de compra e venda de títulos e valores mobiliários. Porém, o mais usual hoje em dia é que as bolsas de valores atuem como sociedades anônimas, visando lucro através de seus serviços. Segundo Morais (1989) o conceito de bolsa de valores, aparece com o surgimento das primeiras sociedades anônimas. Os primeiros encontros periódicos de mercadores e negociantes, com o objetivo de trocar títulos e direitos sobre mercadorias e empresas, tiveram lugar em 1453 na mansão da família Vander Buerze em Bruges (MORAIS, 1989). No caso de ser organizada como sociedade civil, seu patrimônio é representado por títulos pertencentes às sociedades corretoras que a compõem; se for organizada como S.A., este patrimônio é composto por ações. A bolsa deve preservar elevados padrões éticos de negociação, divulgando - com rapidez, amplitude e detalhes - as operações realizadas.

Nas primeiras décadas do século XX, a gritaria do tradicional pregão viva-voz (sistema de negociação de ativos e contratos mediante a apregoação em viva-voz, pelos operadores de pregão, realizado em sala de negociações especialmente designada para tal) das bolsas de valores foi substituído pelo pregão eletrônico (sistema de negociação em que o registro de ofertas é feito em sistema eletrônico, por meio de terminais instalados nas corretoras de valores e sob a responsabilidade destas).

As dez maiores bolsas mundiais, em termos de capitalização de mercado, são: Bolsa de Nova York (NYSE), NASDAQ, Bolsa de Tóquio, Bolsa de Xangai, Bolsa de Londres

(LSE), Bolsa de Paris, Bolsa de Shenzhen (China), Bolsa de Hong Kong, Bolsa de Toronto (TSX) e Bolsa de Frankfurt. A BM&F BOVESPA aparece em décimo terceiro lugar.

Os movimentos dos preços no mercado ou em uma seção do mercado são capturados através de índices chamados Índice de Bolsa de Valores.

2.4.1 Índices de Bolsas de Valores

O índice de uma Bolsa de Valores é um valor que mede o desempenho médio dos preços de uma suposta carteira de ações, refletindo o comportamento do mercado em determinado intervalo de tempo. A carteira deve conter ações que expressem, da forma mais próxima possível, o comportamento registrado pelo mercado, mostrando-se sensível às oscilações nos preços de negociações (ASSAF NETO, 2009).

Assaf Neto (2009) diz ainda que o índice do mercado acionário é bastante útil por refletir o comportamento dos investimentos em ações e, em consequência, as tendências gerais da economia.

2.5 Risco Financeiro

O termo risco financeiro, de acordo com uma de suas interpretações, se refere à possibilidade de que uma carteira de investimentos sofra perdas em seu valor devido a um fator externo. Em relação às Finanças, risco pode ser expresso de acordo com Gitman e Hastings (1987 apud SECURATO, 1996): “no sentido mais básico, [...] pode ser definido como a possibilidade de perda” ou de acordo com Solomon e Pringle (1981 apud SECURATO, 1996) “o grau de incerteza a respeito de um evento”.

O risco pode ser proveniente de diferentes fatores; por exemplo, o fator de risco pode ser a possibilidade de uma contraparte não honrar um compromisso, ou talvez o fator de risco seja a possibilidade do preço de um ativo no mercado flutuar.

Duarte Júnior (1993) apresentou o conceito de risco numa classificação multidimensional, que cobriria quatro grandes grupos: risco de mercado, risco operacional, risco de crédito e risco legal, mais detalhados abaixo:

- Risco de Mercado: representa o risco (perdas potenciais) decorrente de flutuações no mercado.
- Risco de Crédito: representa o risco de que uma contraparte não honre com um compromisso.

- Risco Operacional: está relacionado a possíveis perdas resultantes de sistemas e/ou controles inadequados, falhas de gerenciamento e erros humanos.
- Risco Legal: engloba as possíveis perdas quando um contrato não pode ser legalmente amparado. Incluem riscos de perdas por documentação insuficiente, insolvência, ilegalidade, falta de representatividade e/ou autoridade por parte do negociador.

Uma estratégia completa de gerenciamento de risco deve englobar todas estas vertentes. Neste trabalho, no entanto, iremos nos concentrar no risco de mercado, que é a medida que o VaR procura capturar. O risco de mercado provém da possibilidade de mudança de preço dos ativos. A volatilidade serve para quantificar o potencial dessas mudanças, podendo ser calculada de diversas maneiras, tais como: o maior e o menor preço de uma ação num determinado período, desvio padrão, a variância e beta que é uma medida de volatilidade comparada (por exemplo, a volatilidade de uma ação em relação à volatilidade do índice Ibovespa como um todo). Quanto maior a possibilidade de mudança no preço do ativo, isto é, quanto maior a volatilidade, maior é o risco de mercado deste ativo. Da mesma forma, o risco de mercado de uma carteira provém da sua volatilidade. Mensurar o risco de mercado de uma carteira, portanto, corresponde a encontrar o melhor método para mensurar a volatilidade desta carteira.

2.6 Séries Temporais

Um série temporal é qualquer conjunto de observações ordenadas sob um índice cronológico qualquer. Há, basicamente, dois domínios usados na análise de séries temporais. Em ambos, o objetivo é construir modelos para as séries, com propósitos determinados. No primeiro domínio, a análise é feita no domínio temporal e os modelos propostos são modelos paramétricos (com um número finito de parâmetros). No segundo, a análise é conduzida no domínio de frequências e os modelos propostos são não-paramétricos (MORETTIN; TOLOI, 1981).

Dentre os modelos paramétricos, tem-se os modelos ARIMA (Auto Regressivo Integrado de Média Móvel), que serão utilizados na realização desse trabalho.

2.6.1 Séries Financeiras

O estudo de dados econômicos podem ser feitos de duas maneiras, em corte transversal (*cross section*) ou séries temporais (*time series*) - que será usado nesse trabalho. Assim foi observada a trajetória temporal de vinte e cinco índices de bolsas de valores dos continentes americano, europeu e asiático. A saber: AEX (Amsterdam Exchange Index

- Holanda), BFX (BEL 20 - Bélgica), BSESN (Bolsa de Valores de Bombaim - Índia), BUX (Budapest Stock Exchange - EUA), BVSP (IBOVESPA - Brasil), CSE (COLOMBO IND ALL SHS - Sri Lanka), DJI (Dow Jones Industrial Average - EUA), FCHI (CAC 40 - França), GDAXI (DAX - Alemanha), GSPC (S&P 500 - EUA), GSPTSE (S&P/TSX Composite index - Canadá), HSI (HANG SENG INDEX - China), IBEX (IBEX 35 - Espanha), JKSE (Jakarta Composite Index - Indonésia), KS11 (KOSPI Composite Index - Coreia), MERV (MERVAL BUENOS AIRES - Argentina), MXX (IPC - México), N225 (Nikkei 225 - Japão), NDX (NASDAQ 100 - EUA), SSEC (SSE Composite Index - China), STOXX50E (ESTX50 EUR P - Suíça), TWII (TSEC weighted index - Taiwan), VIX (CBOE Volatility Index - EUA), XMI (NYSE ARCA MAJOR MARKET INDEX - EUA) e XU100.IS (BIST 100 - Turquia).

2.7 VaR - Value at Risk

O VaR é uma metodologia muito usada para medir o risco máximo a posteriori assumido por um processo, utilizando-se uma dada distribuição de probabilidade para a avaliação de risco financeiro em portfólios é o VaR, o qual é uma medida probabilística que ganhou tamanha popularidade em função de sua simplicidade de cálculo, e a capacidade de resumir em apenas um número o risco de uma carteira de ações (JORION, 2003).

Empregada inicialmente pela JP Morgan em 1995 para avaliação de risco e posteriormente foi adaptada por vários bancos. O VaR pode ser construído utilizando-se a metodologia paramétrica e não-paramétrica.

Na paramétrica escolhe-se o nível de confiança e estima-se a perda máxima. Já na não-paramétrica não faz-se necessário ter conhecimento sobre a distribuição teórica de probabilidade. Na formulação apenas considera-se dados passados dos títulos que compõe a carteira, por isso, as metodologias VaR se baseiam apenas em movimentos normais de mercado - ausência de grandes crises - já que tais pontos podem influenciar (viesar) previsões futuras. O VaR não-paramétrico pode ser estimado via dados históricos ou através de uma simulação de Monte Carlo.

A eficiência do VaR paramétrico está intimamente relacionada com a distribuição de probabilidade da variável a ser analisada. Assim, o conhecimento da correta distribuição de probabilidade como um todo e especialmente seus valores extremos, ganham importância ainda maior em épocas de instabilidade dos mercados, pois são esses eventos extremos que irão modificar as caudas da distribuição (SOUZA, 1999).

Portanto, as instituições financeiras devem ter certa cautela em relação a simplificações para o cômputo do VaR. Mais especificamente é necessária uma comprovação

de que os dados analisados sigam uma determinada distribuição de probabilidade, pois o seu desconhecimento, e conseqüente má avaliação do risco poderia levar a um déficit na provisão das instituições financeiras.

Segundo Maletta e Coelho (2005) as três principais maneiras de calcular o VaR são histórica, paramétrica e por simulação de Monte Carlo. O VaR paramétrico que pressupõe o conhecimento prévio da distribuição de probabilidades da série de retornos, o VaR histórico onde não se pressupõe o conhecimento da distribuição de probabilidades da série de retornos e utiliza a série histórica, e o VaR de Monte Carlo, que é uma junção dos dois métodos anteriores.

2.7.1 VaR paramétrico

O VaR analítico ou paramétrico usa a informação do retorno esperado e da volatilidade da carteira, obtida através de um modelo matemático, para calcular o valor da inversa da função de distribuição cumulativa no percentil indicado pelo intervalo de confiança. Segundo Maletta e Coelho (2005) para isso, baseia-se em fortes premissas: o retorno dos ativos ou fatores de risco seguem uma distribuição estatística (geralmente utiliza-se a distribuição Normal), a variação dos ativos é linearmente proporcional à variação do portfólio, os retornos dos ativos são homocedásticos durante o horizonte de tempo e não há autocorrelação nas séries de retornos.

Para o caso simples de uma carteira de ações, o modelo média-variância ou o modelo de índice único são suficientes para o cálculo da variância da carteira. Assim, o único passo restante para o cômputo do VaR é o cálculo da inversa da função de distribuição cumulativa da Normal.

A principal vantagem do VaR paramétrico é a facilidade de implementação e a rapidez do cálculo, visto que o VaR é uma simples multiplicação. Porém, as premissas utilizadas nem sempre são constatadas na prática, principalmente a normalidade dos retornos dos ativos (LI, 1999).

2.7.2 VaR histórico

Um dos métodos mais comuns para estimativa VaR é a Simulação Histórica. Essa abordagem simplifica drasticamente o procedimento para o cálculo do Valor em Risco, uma vez que não faz qualquer suposição de distribuição sobre os retornos de portfólio (MANGANELLI; ENGLE, 2001).

Dowd (1998) comenta que a ideia por trás do modelo de Simulação Histórica é a de utilizar a distribuição histórica de retornos dos ativos de uma carteira para calcular

o VaR desta, assumindo a hipótese de que esta carteira tenha sido a mesma no passado. Com isso, uma das diferenças em relação aos modelos analíticos é o fato de não necessitar de cálculos de volatilidade e correlações, já que tais valores estão implícitos nos cenários utilizados.

O VaR histórico consiste em simular o retorno da carteira a partir de cenários históricos de retornos dos ativos subjacentes. Assim como no VaR de Monte Carlo, ao fim da simulação se obtém um vetor de retornos da carteira, que deve ser ordenado, e o VaR é obtido a partir da aplicação de um ponto de corte neste vetor.

2.7.3 VaR de Monte Carlo

O cálculo de VaR por simulação de Monte Carlo não se prende às premissas da metodologia do VaR paramétrico nem à suposição de que o comportamento futuro irá repetir o comportamento passado, principais desvantagens das outras metodologias. Porém, por se tratar de um método que necessita intensivamente de recursos computacionais e repetições de procedimentos, seus cálculos podem ser lentos e com implementação difícil e cara. Outro ponto importante, é que os fatores de risco devem ser modelados por processos estocásticos, o que exige profissionais qualificados e a escolha do modelo mais apropriado para cada situação (MALETTA; COELHO, 2005).

Ainda segundo Maletta e Coelho (2005) a diferença do VaR histórico para o VaR de Monte Carlo é que no último os retornos dos ativos são obtidos a partir de geração de números aleatórios, enquanto no primeiro os retornos dos ativos são obtidos diretamente dos dados históricos.

Segundo Araújo (2001) os métodos por simulação de Monte Carlo são considerados os mais robustos e os mais poderosos para o cálculo do *Value-at-Risk*, pois contemplam uma grande variedade de riscos financeiros.

3 Metodologia

3.1 Análise em Janelas Móveis (*Sliding Window Analysis – SWA*)

As análises de janela deslizante são uma abordagem comum ao examinar conjuntos de dados muito grandes, como séries financeiras. A aplicação de técnicas dependentes do tempo ou em janelas móveis foi utilizada para análise de Hurst em séries financeiras (CARBONE; CASTELLI; STANLEY, 2004). Esta técnica se caracteriza por avaliar uma medida (ou estatística) ao longo do tempo em blocos de séries temporais suficientemente grandes a fim de manter consistência dos resultados.

Esta técnica se caracteriza por possuir maior sensibilidade quando o tamanho de janela k é pequeno (LIU et al., 2016), porém dependendo da estatística mensurada isso pode levar a uma maior incerteza no resultado. Para entropias, valores discrepantes numa série temporal tendem a inserir mais informação no sistema elevando a entropia (LIU et al., 2016).

Segundo Box et al. (2015) séries temporais estritamente estacionárias tendem a conservar características probabilísticas independente do instante de tempo, ou seja, para análise em janelas moveis as medidas calculadas devem ser as mesmas ao longo do tempo se a série for estacionária.

Na Figura 1 abaixo pode-se ver como uma série de dados é dividida com o algoritmo SWA, para a obtenção de amostras de grandes séries. E em cada amostra é feita a análise desejada de acordo com o objetivo do trabalho. Na série mostrada nesta Figura 1 foi usando um tamanho de janela de 4 e um tamanho de passo de 2, e em cada amostra foi calculada a média:

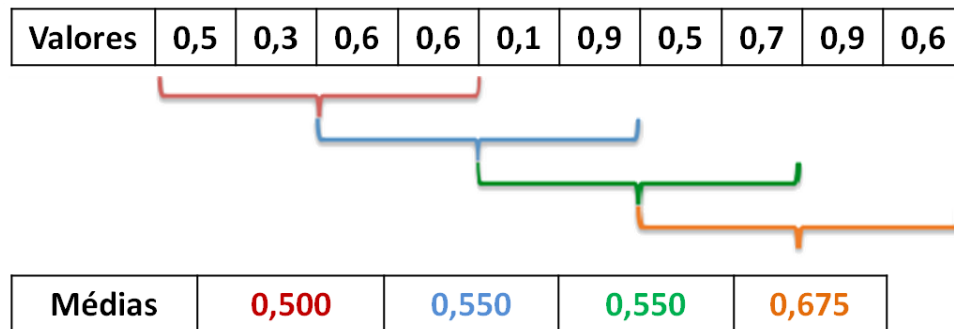


Figura 1: Ilustração do funcionamento da Análise das Janelas Móveis

Neste trabalho as amostras criadas com o Algoritmo de Janelas Móveis, a partir da série composta pelos retornos dos índices das ações, tem tamanho 247 e passo de 21, pois foi considerado o número médio de dias comerciais em uma ano e um mês respectivamente. E em cada uma das amostra foi feito o teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov e calculado o VaR para a distribuição Normal e de Laplace.

3.2 Teste de Aderência de Kolmogorov-Smirnov

Segundo Siegel S. ; Castellan (2006) o teste Kolmogorov-Smirnov é usado para determinar se duas distribuições de probabilidade subjacentes diferem uma da outra ou se uma das distribuições de probabilidade subjacentes difere da distribuição em hipótese, em qualquer dos casos com base em amostras finitas.

Em alguns problemas, tem-se uma distribuição específica em mente para os dados que vai-se observar. Se essa distribuição não é apropriada, não tem-se necessariamente uma família paramétrica de distribuições alternativas em mente. Nestes casos, e outros, ainda pode-se testar a hipótese nula de que os dados vêm de uma distribuição específica contra a hipótese alternativa de que os dados não vêm dessa distribuição (DEGROOT; SCHERVISH, 2002).

Ainda segundo DeGroot e Schervish (2002) não devemos supor que as observações disponíveis provêm de uma determinada família paramétrica de distribuições. Em vez disso, estudaremos as inferências que podem ser feitas sobre a distribuição a partir da qual as observações vêm, sem fazer suposições especiais sobre a forma dessa distribuição. Como exemplo, podemos simplesmente supor que as observações formam uma amostra aleatória a partir de uma distribuição contínua, sem especificar a forma dessa distribuição, e poderemos então investigar a possibilidade de que essa distribuição seja uma distribuição normal. Problemas nos quais as distribuições possíveis das observações não são restritas a

uma família paramétrica específica são chamados de problemas não paramétricos, e os métodos estatísticos que são aplicáveis em tais problemas são chamados de métodos não paramétricos.

O procedimento básico para o teste procura especificar a distribuição de frequência acumulada que ocorreria sob a distribuição teórica, e compará-la com a distribuição de frequência acumulada observada. Sendo que a distribuição teórica representa o que se poderia observar sob H_0 . Assim, determina-se o ponto em que essas duas distribuições possuem a maior divergência, a qual chamará $D_{\text{máx}}$. A referência à distribuição amostral indica se essa diferença máxima pode ser atribuída ao acaso. Isto é, a distribuição amostral indica se uma divergência de tal magnitude teria probabilidade de ocorrer se as observações constituíssem realmente uma mostra aleatória da distribuição teórica (SIEGEL S. ; CASTELLAN, 2006).

Portanto, será efetuado o seguinte teste de hipóteses:

$$H_0 : F(x) = F_0(x)$$

$$H_1 : F(x) \neq F_0(x)$$

Sendo $F(x)$ a distribuição acumulada de x , $F_0(x)$ uma distribuição de frequência acumulada teórica sob H_0 , e seja $S_N(x)$ a distribuição de frequência acumulada de uma amostra aleatória de N observações, quando x é qualquer escore possível, $S_N(x) = \frac{k}{N}$, onde k é o número de observações não superiores a x .

Assim, sob a hipótese nula, espera-se que as diferenças entre $F_0(x)$ e $S_N(X)$ sejam pequenas e estejam dentro dos limites aleatórios. Esse desvio máximo ($D_{\text{máx}}$) é dado pela maior diferença em valor absoluto, como pode ser observado abaixo:

$$D = \text{máximo} | F_0(x) - S_N(X) |$$

Mediante a tabela de valores críticos, irá se determinar à probabilidade (bilateral) associada à ocorrência, sob H_0 , de valores tão grandes quanto o valor observado de D . Para amostras maiores que 35 observações ($N > 35$), como de fato ocorreu no presente trabalho, utilizam-se o valores crítico abaixo (SIEGEL S. ; CASTELLAN, 2006):

$$\text{Para } \alpha = 0,05 \Rightarrow D_{\text{crítico}} = \frac{1,36}{\sqrt{N}}$$

Se $| D_{\text{calculado}} | \geq | D_{\text{crítico}} |$, rejeitamos H_0 , concluindo que a amostra tem distribuição diferente da distribuição teórica testada.

3.3 Cálculo do VaR paramétrico

Para obter o valor do VaR, pressupondo-se uma distribuição Normal(μ, σ), utiliza-se a seguinte equação:

$$\text{VaR}_N = \mu_N + Z \cdot \sigma \quad (3.1)$$

Em que $\mu_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ é a média da série histórica, Z é o valor da inversa da função de distribuição Normal no percentil de 5%, e $\sigma = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2$ é o desvio-padrão da série histórica.

Para obter o valor do VaR, pressupondo-se uma distribuição de Laplace(μ, b), utiliza-se a seguinte equação:

$$\text{VaR}_L = \mu_L + Q \cdot b \quad (3.2)$$

Em que μ_L é mediana da série histórica, Q é valor da inversa da função de distribuição de Laplace no percentil de 5%, e $b = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_i - \mu|$ é o desvio absoluto médio da série histórica.

3.3.1 Distribuição Normal

Em probabilidade e estatística, a distribuição normal é uma das distribuições de probabilidade mais utilizada para modelar fenômenos naturais. Segundo Bussab e Morettin (2009) sua origem remonta a Gauss em seus trabalhos sobre erros de observações astronômicas, por volta de 1810, donde vem o nome de distribuição gaussiana para tal modelo.

Função de densidade de probabilidade

Uma variável aleatória tem uma distribuição **Normal**(μ, σ^2) se a função de densidade de probabilidade for

$$f(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.3)$$

Aqui, μ é o parâmetro de escala mediana e σ^2 é o desvio padrão, descritos por:

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2$$

3.3.2 Distribuição de Laplace

A distribuição de Laplace foi desenvolvida em 1774 pelo matemático e astrônomo francês Pierre-Simon Laplace a partir de sua primeira lei de erros (KOTZ; KOZUBOWSKI; PODGORSKI, 2001 apud BECKER, 2015). A distribuição também é conhecida pelo nome de distribuição exponencial dupla, pela forma de sua função de densidade de probabilidade.

Função de densidade de probabilidade

Uma variável aleatória tem uma distribuição de **Laplace**(μ, b) se a função de densidade de probabilidade por

$$f(x|\mu, b) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x - \mu|}{b}} \quad (3.4)$$

Em que, μ é o parâmetro de localização mediana e $b > 0$, também referido como a diversidade, é o parâmetro de escala, descrito por:

$$b = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_i - \mu|$$

A função de densidade de probabilidade da distribuição de Laplace também é uma reminiscência da distribuição Normal; no entanto, enquanto a distribuição Normal é expressa em termos da diferença quadrática da média μ , a densidade de Laplace é expressa em termos da diferença absoluta da média. Consequentemente, a distribuição de Laplace tem caudas mais gordas do que a distribuição Normal.

3.3.3 Escolha das Distribuições

Jorion (2003) afirma que se pressupõe a normalidade com o objetivo de simplificar o cálculo do VaR. Ao fazer uma primeira análise exploratória dos dados, foi percebido que os dados apresentavam uma distribuição parecida com a Distribuição de Laplace. Com essa motivação resolvemos testar a aderência dos dados a Distribuição de Laplace e confrontar com a aderência a Distribuição Normal.

3.4 Critério de Informação de Akaike e Critério de Informação Bayesiano

AIC foi desenvolvido pela primeira vez por Akaike (1973) como uma forma de comparar diferentes modelos em um dado resultado. A seleção do modelo é importante, uma vez que o modelo está subordinado pode não capturar a verdadeira natureza da variabilidade na variável de resultados, enquanto um modelo superado perde a generalidade.

O *AIC* é então uma maneira de selecionar o modelo que melhor equilibra essas desvantagens. Um vez selecionado o melhor modelo, pode-se então utilizar esse modelo para determinar a relação entre variáveis específicas e resultado de interesse. Akaike (1973) mostrou que esta seleção do “melhor” modelo é determinado por um escore *AIC*:

$$AIC = 2K - 2 \log(\mathcal{L}(\hat{\theta}|y)); \quad (3.5)$$

em que K é o número de parâmetros estimáveis e $\log(\mathcal{L}(\hat{\theta}|y))$ é a probabilidade de log em seu ponto máximo estimado. A constante 2 permanece “por razões históricas”(BURNHAM; ANDERSON, 2003).

Hurvich e Tsai (1989) refinaram ainda mais esta estimativa para corrigir pequenas amostras de dados:

$$AIC_C = AIC + \frac{2K(K+1)}{n-K-1} \quad (3.6)$$

onde n é o tamanho da amostra e K e *AIC* são definidos acima. Se n for grande em relação a K , esta correção é insignificante e *AIC* é suficiente. O *AIC_C* é mais geral, no entanto, e é geralmente usado no lugar do *AIC*. O melhor modelo é então o modelo com o menor índice *AIC_C* (ou *AIC*). É importante notar que os escores *AIC* e *AIC_C* são comuns e nada significativos por conta própria. Eles são simplesmente uma maneira de classificar o modelos.

O BIC (*Bayesian Information Criterion*) é um critério de seleção de modelo proposto por Schwarz et al. (1978) e modificado por Carlin e Louis (2000) para ser aplicado considerando a densidade a posteriori dos parâmetros do modelo ajustado. Este critério pondera entre a função log-verossimilhança maximizada e o número de parâmetros do modelo. O melhor modelo é aquele que apresenta o menor valor do BIC dado por,

$$BIC = E[\ln L(\theta)] - \frac{1}{2}p \ln(N) \quad (3.7)$$

em que $E[\ln L(\theta)]$ é o valor esperado tomado com relação a densidade a posteriori, da função log-verossimilhança, p é a dimensão do vetor de parâmetros e N é o tamanho amostral.

Tanto o *AIC* como o *BIC* são critérios que penalizam modelos com muitas variáveis sendo que valores menores de *AIC* e *BIC* são preferíveis.

3.5 Identificação e Aplicação do Modelo

Para o desenvolvimento e aplicação do modelo ARIMA, utilizou-se a série temporal dos valores do VaR calculado a partir dos dados do retornos da séries dos valores dos índices das bolsas selecionadas. O VaR foi calculado utilizando a distribuição Normal como sugerido por Morgan et al. (1996), e posteriormente utilizou-se a distribuição de Laplace, para assim poder comparar qual consegue descrever melhor os dados da séries dos valores dos índices das bolsas de valores selecionadas.

3.6 Modelo ARIMA (Auto Regressivo Integrado de Média Móvel) para Previsões de Séries Temporais

O modelo ARIMA, também conhecido como metodologia Box-Jenkins, é próprio para modelagem de séries temporais estacionárias ou não-estacionárias homogêneas. Os modelos ARIMA (p,d,q) são modelos que se tornam estacionários após a aplicação de d diferenças na série original, a série que exibe tal comportamento é chamada de não-estacionária homogênea. A ordem de integração é o número de diferenças necessárias para tornar uma série não-estacionária em estacionária (PINDYCK; RUBINFELD, 2004; VASCONCELLOS; ALVES, 2000).

Segundo Vasconcellos e Alves (2000) os modelos ARIMA, são as combinações de três componentes, o componente Auto-Regressivo (AR), o filtro de Integração (I) e o componente de Médias Móveis (MA).

Box et al. (2015) diz que a construção do modelo é baseada em um ciclo iterativo, baseada nos próprios dados, cujas etapas são:

- Especificação – uma classe geral de modelos é considerada para análise;
- Identificação de um modelo com base na análise de autocorrelações e autocorrelações parciais;
- Estimação dos parâmetros do modelo identificado;

- Verificação do modelo ajustado através de uma análise de resíduos (menor erro quadrático médio) para saber se este é adequado para os fins (no caso, de previsão).

Esses modelos são representados pela notação $ARIMA(p,d,q)$, onde (p,d,q) é a representação da ordem do modelo, sendo p é o número de termos autorregressivos; d é o número de diferenças; q é o número de termos da média móvel. Um $ARIMA(4,1,2)$, indica um modelo de ordem 4 para o componente AR, ordem 1 para o componente Integração e 2 para o componente MA.

3.6.1 Avaliação do desempenho de previsões

O objetivo principal da metodologia é encontrar um modelo que melhor descreve o comportamento da série no futuro. Um modelo pode apresentar todas as evidências estatísticas que o tornam consistente, porém de nada adianta se não efetuar boas previsões, para isso realiza-se a checagem do modelo para ver o quanto ele é capaz de prever corretamente. Um boa metodologia para aferir o quão bom é o modelo consiste nas previsões *ex post*, na qual são feitas previsões para períodos passados. Pindyck e Rubinfeld (2004) consideram que nesse tipo de previsão as variáveis já são conhecidas para o período de previsão, assim as previsões podem ser verificadas com os dados existentes e assim oferecem um meio de avaliar o modelo de previsão. Pindyck e Rubinfeld (2004) sugerem dois métodos de avaliação de previsões: *Raiz do Erro de previsão Quadrático Médio - RMSE (Root Mean Square Erro)* e *Coeficiente de desigualdade de Theil - U de Theil*, definidos como:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (Y_t^s - Y_t^a)^2} \quad (3.8)$$

$$U = \frac{\sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (Y_t^s - Y_t^a)^2}}{\sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (Y_t^s)^2} - \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (Y_t^a)^2}} \quad (3.9)$$

Em que Y_t^s é igual ao valor previsto, Y_t^a é igual ao valor efetivo e T é igual ao número de períodos.

O *RSME* é uma medida de desvio da variável simulada em comparação com sua evolução temporal. Pindyck e Rubinfeld (2004) observam que a magnitude desse erro apenas pode ser comparada com a média da variável em questão. O *U de Theil* mede a raiz do quadrado médio do erro de previsão em termos relativos e terá sempre valor

entre 0 e 1. Segundo Gluckstern, Francisco e Jr (2002) uma variante da equação (3.8) que mede a magnitude do erro é a *Raiz do Erro Quadrático Percentual Médio - REQPM (Root Mean Square Percent Error)* e o *Erro Percentual Absoluto Médio - EPAM (Mean Absolute Percent Error - MAPE)*, definidos como:

$$REQM = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\frac{(Y_t^s - Y_t^a)}{Y_t^a} \right)^2} \quad (3.10)$$

$$EPAM = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left| \frac{(Y_t^s - Y_t^a)}{Y_t^a} \right| \quad (3.11)$$

Em que Y_t^s é igual ao valor previsto, Y_t^a é igual ao valor efetivo e T é igual ao número de períodos.

Passou-se então a procurar um modelo ARIMA, que melhor se adequava a 90% dos dados, podendo assim utilizar os 10% restantes para testes *ex post*. Avaliando assim o quão boa é a predição do modelo ARIMA proposto, o qual foi medido através do Erro Percentual Médio Absoluto (MAPE - sigla em inglês).

3.7 Software

Todos os resultados foram calculados no software R Core Team 2017 (R Core Team, 2017) utilizando os pacotes ggplot2 (WICKHAM, 2009) para construção dos gráficos, zoo (ZEILEIS; GROTHENDIECK, 2005) para janelas móveis e moments (KOMSTA; NOVOMESTKY, 2015) para calcular assimetria e curtose, os pacotes forecast, tseries e bizdays (HYNDMAN, 2017; TRAPLETTI; HORNIK, 2017; FREITAS, 2017) para a construção do modelo ARIMA e os pacotes fitdistrplus e xts (DELIGNETTE-MULLER; DUTANG, 2015; RYAN; ULRICH, 2017) para avaliar a adequação dos dados as distribuições.

3.8 Aquisição e Tratamento dos dados

As Bolsas de Valores mundiais publicam quase em tempo real seus índices em seus site e em sites dedicados a assuntos financeiros, tais como o Yahoo Finanças!, UOL economia, G1 economia, InfoMoney e o Investing.com. Ao fim do dia as bolsas publicam um relatório com as informações do pregão do dia. Estes relatório pode ser acessado diretamente dos sites das bolsas, ou em sites de finanças, citados anteriormente, para essa dissertação os dados foram extraídos do Yahoo... (2017). Os relatórios contêm dados tais como quantidade de pontos de abertura, fechamento e também a menor e a maior cotação

do dia. Para esse trabalho foram coletados dados de 07/07/1997 até 05/06/2017 de vinte e cinco bolsas que abrangem os continentes americano, europeu e asiático.

A recuperação dos dados foi feita no dia 06 de junho de 2017, fechando assim um período de 20 anos. Que corresponde a aproximadamente 7273 dias, porém as séries apresentaram em média 4924 dados, que é a média de dias úteis entre essas duas datas. Séries financeiras comumente possuem valores ausentes nas séries temporais devido aos sábados, domingos e feriados, não apresentando assim o mesmo tamanho, devido a diferença dos feriados nos diversos países. Assim foi implementado um procedimento para a imputação dos dados ausentes nas séries, fazendo assim com que as séries tenham o mesmo tamanho. Ao preencher valores faltantes em uma série, pode-se usar uma estratégia de interpolação, ou pode-se apenas repetir o último valor. Para evitar que o formato da série fosse alterado por imputação de valores repetidos, optou-se pela interpolação linear, preenchendo os dados faltantes com a média entre o dado anterior e posterior.

Gerando assim novas séries, as quais foram transformadas em séries de retornos, retornos esses obtidos através da expressão:

$$R = \frac{v_f - v_i}{v_i}$$

Em que R é o retorno, v_i é o valor no dia t_i , e v_f é o valor no dia t_{i+1} .

4 Resultados

4.1 Estatística Descritiva

Daremos enfoque a cinco dessas séries para uma melhor compreensão de como os dados foram coletados, tratados e analisados.

CAC 40 - França (FCHI)

CAC 40, cujo nome deriva da expressão *Cotation Assistée en Continu* (Avaliação Contínua Assistida), é um índice bolsista que reúne as 40 maiores empresas cotadas na França. Dentre elas Alcatel-Lucent, Carrefour, Danone, L'Oréal, Legrand, Michelin, Peugeot, Renault, Sodexo e Total. A divulgação dos valores desse índice é realizada pela *Euronext Paris* e supervisionado pelo *Conseil Scientifique des Indices*, o qual atua de forma independente, tendo como objetivo adaptar o índice de modo que capte as mudanças de mercado (CAPELLE-BLANCARD; CHAUDHURY, 2001; DEVILLE, 2003).

Foi usado os registros diários valores de fechamento das ações negociadas durante o período de 07 de julho de 1997 a 05 de junho de 2017, totalizando 5076 pontos. Após a interpolação para preenchimento dos dias faltantes a série passou a contar com 5120 pontos. A Figura 2 mostra o gráfico dessa série nesse período. Após o cálculo dos retornos normalizados, temos a série de retornos como mostra a Figura 3.

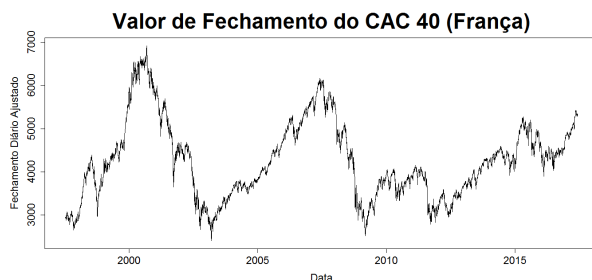


Figura 2: Série de fechamento do CAC 40

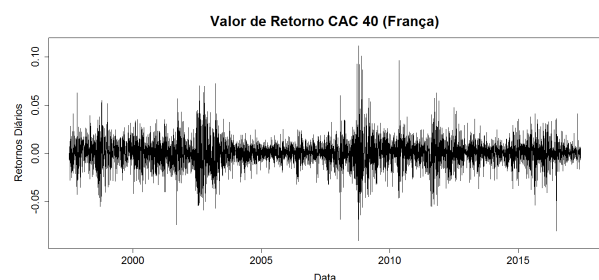


Figura 3: Série de retornos do CAC 40

As séries de fechamento (Tabela 1) e de retornos (Tabela 2) apresentam as seguintes estatísticas básicas:

Tabela 1: Estatística da série de fechamento da CAC 40

Estatística	Valor
Mínimo	2403,04
Mediana	4176,47
Média	4252,25
Máximo	6922,33
Desvio Padrão	898,66
Amplitude	4519,29

Tabela 2: Estatística da série de retornos CAC 40

Estatística	Valor
Mínimo	-0,090682
Mediana	0,0004147
Média	0,0002249
Máximo	0,1117617
Desvio Padrão	0,0147707
Amplitude	0,2021299

Após fazer o teste de Aderência de Kolmogorov-Smirnov, verificou-se que a distribuição de Laplace se adequa melhor aos dados em detrimento da Normal, mesmo considerando os períodos de crise, como se pode ver na Tabela 3 e nas figuras 4(a) e 4(b).

Tabela 3: Critérios de seleção de Modelos da CAC 40

Critérios	Laplace	Normal
AIC	-238899,83	-28378,14
AICc	-238899,83	-28378,14
BIC	-238886,77	-28365,08

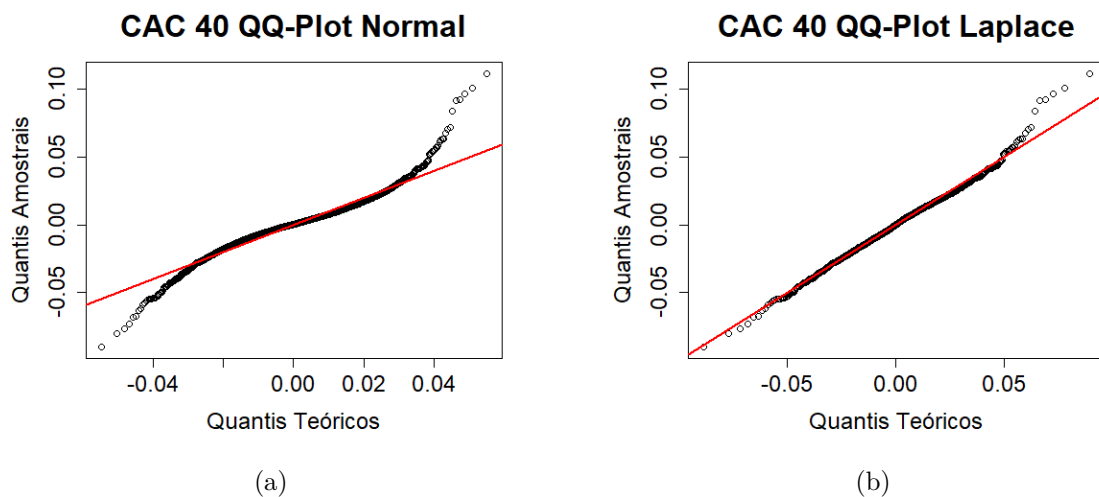


Figura 4: Adequação da série de retornos da CAC 40 as distribuições Normal(a) e de Laplace(b)

A Figura 5 mostra o histograma dos retornos do CAC 40, e seu ajuste as distribuições Normal e Laplace.

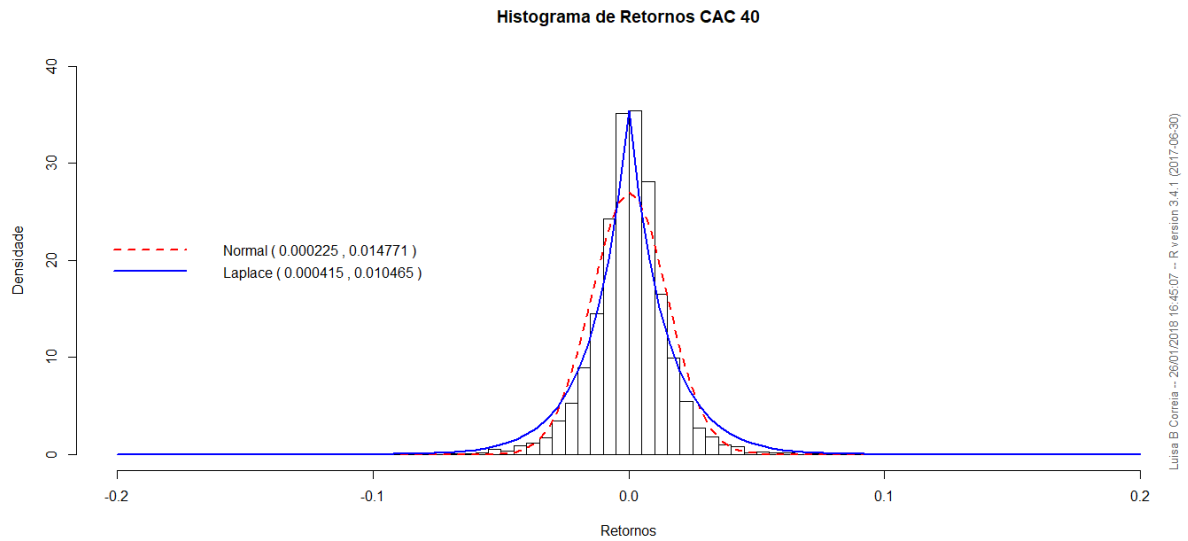


Figura 5: Histograma da série de retornos do CAC 40 e ajuste das distribuições Normal e Laplace

Tendo em mão qual a distribuição a qual os dados melhor se adequam, pode-se calcular o VaR paramétrico, utilizando a distribuição de Laplace, onde 2,58% das amostras foram rejeitadas (pontos que apresentam $P_Lap < 0.05$), como demonstra a Figura 6. Nestes pontos o valor calculado para o VaR pode estar sub ou sobrestimado, uma vez que a distribuição utilizada não é a que os dados melhor se adequam.

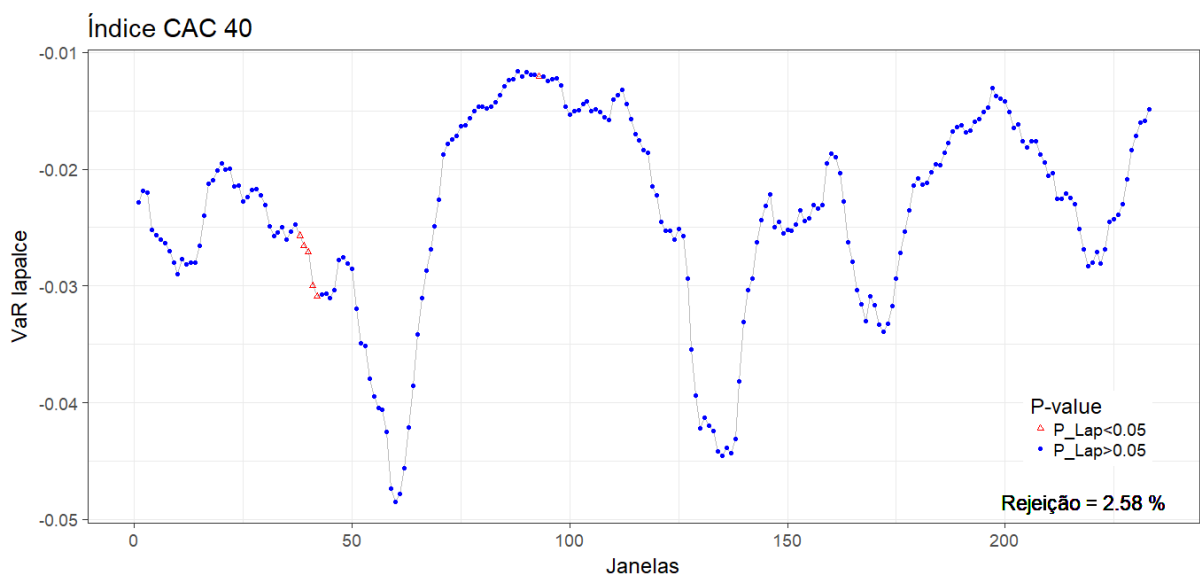


Figura 6: Valores do VaR Laplaciano e índice de rejeição do CAC 40

O modelo ARIMA final apresentou a configuração ARIMA(2,0,0), indica um modelo de ordem 2 para o componente AR, ordem 0 para o componente Integração e 0 para o componente MA. Após o teste do desempenho preditivo, obteve-se um MAPE de 16,40%, que significa que o valor que nosso modelo prediz para até 24 meses a frente, caso esteja errado, será em no máximo 16,40%, como mostra a Figura 7. Neste gráfico vemos que intervalo de predição (IP) estimado onde o VaR tem a probabilidade de ocorrer de 80% (cinza escuro) e 95% (cinza claro).

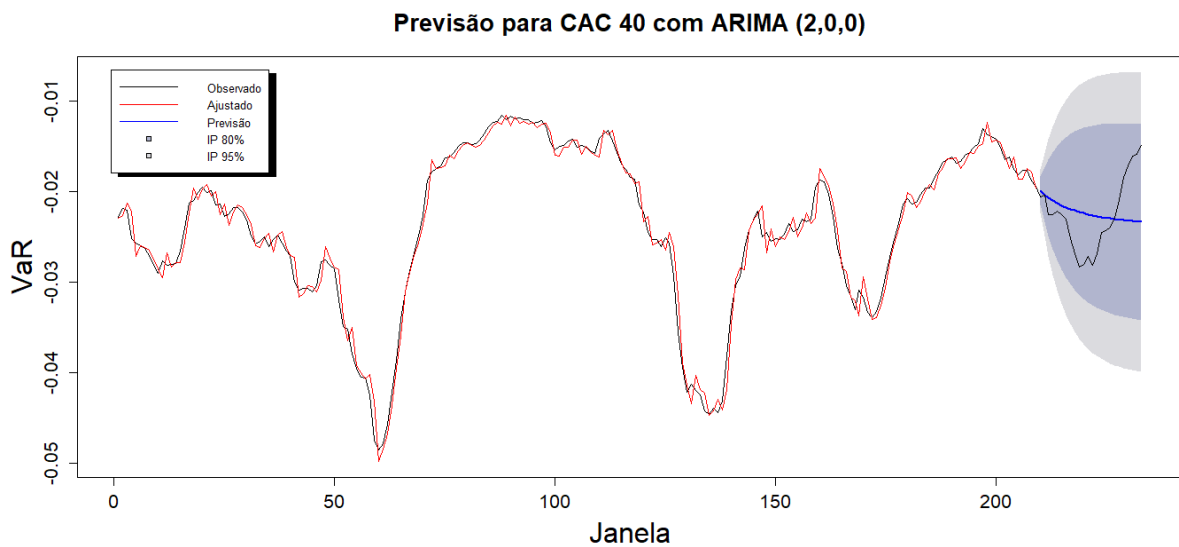


Figura 7: Gráfico de série temporal dos valores calculados do VaR e modelo ARIMA (em vermelho) com sua previsão e intervalos de confiança para o CAC 40

Dow Jones - Estados Unidos (DJI)

Dow Jones Industrial Average é um índice criado em 1896 pelo editor do The Wall Street Journal e fundador do Dow Jones & Company Charles Dow. É o segundo mais antigo índice dos Estados Unidos, também conhecido como DJIA, INDP, Dow 30 ou Dow Jones. Ao lado do Nasdaq Composite e do Standard & Poor's 500 é um dos principais indicadores dos movimentos do mercado americano. Dos três indicadores, DJIA é o mais largamente publicado e discutido.

O cálculo deste índice é bastante simples e é baseado na cotação das ações de 30 das maiores e mais importantes empresas dos Estados Unidos, dentre elas a 3M, American Express, Apple, Boeing, Coca-Cola, Disney, IBM, Intel, Johnson & Johnson, JPMorgan Chase, McDonald's, Microsoft, Nike, Pfizer, Procter & Gamble, Visa Inc., Wal-Mart.

Como o índice não é calculado pela Bolsa de Valores de Nova Iorque (New York

Stock Exchange), seus componentes são escolhidos pelos editores do jornal financeiro norte-americano The Wall Street Journal. Não existe nenhum critério pré-determinado, a não ser que os componentes sejam companhias norte-americanas líderes em seus segmentos de mercado.

Foi usado os registros diários valores de fechamento das ações negociadas durante o período de 07 de julho de 1997 a 05 de junho de 2017, totalizando 5076 pontos. Após a interpolação para preenchimento dos dias faltantes a série passou a contar com 5120 pontos. A Figura 8 mostra o gráfico dessa série nesse período. Após o cálculo dos retornos normalizados, temos a série de retornos como mostra a Figura 9.

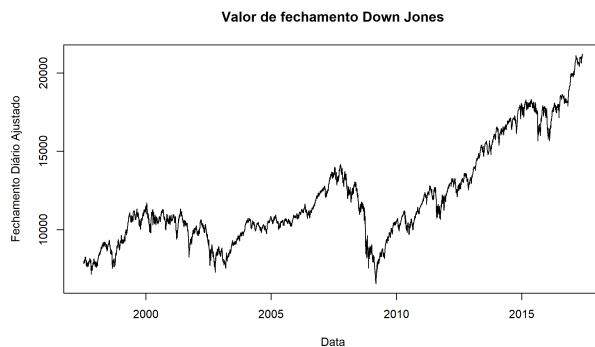


Figura 8: Série de fechamento do DJI

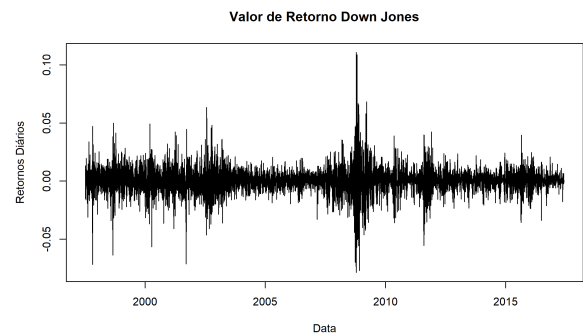


Figura 9: Série de retornos do DJI

As séries de fechamento (Tabela 4) e de retornos (Tabela 5) apresentam as seguintes estatísticas básicas

Tabela 4: Estatística da série de fechamento do DJI

Estatística	Valor
Mínimo	6547,05
Mediana	10935,17
Média	12017,47
Máximo	21206,29
Desvio Padrão	3183,42
Amplitude	14659,24

Tabela 5: Estatística da série de retornos do DJI

Estatística	Valor
Mínimo	-0,0787328
Mediana	0,0004356
Média	0,0002649
Máximo	0,1108033
Desvio Padrão	0,01157262
Amplitude	0,1895361

Após fazer o teste de Aderência de Kolmogorov-Smirnov, verificou-se que a distribuição de Laplace se adequa melhor aos dados em detrimento da Normal, mesmo considerando os períodos de crise, como se pode ver na Tabela 6 e nas figuras 10(a) e 10(b).

Tabela 6: Critérios de seleção de Modelos da DJI

Critérios	Laplace	Normal
AIC	-320395,11	-30465,63
AICc	-320395,10	-30465,63
BIC	-320382,07	-30452,60

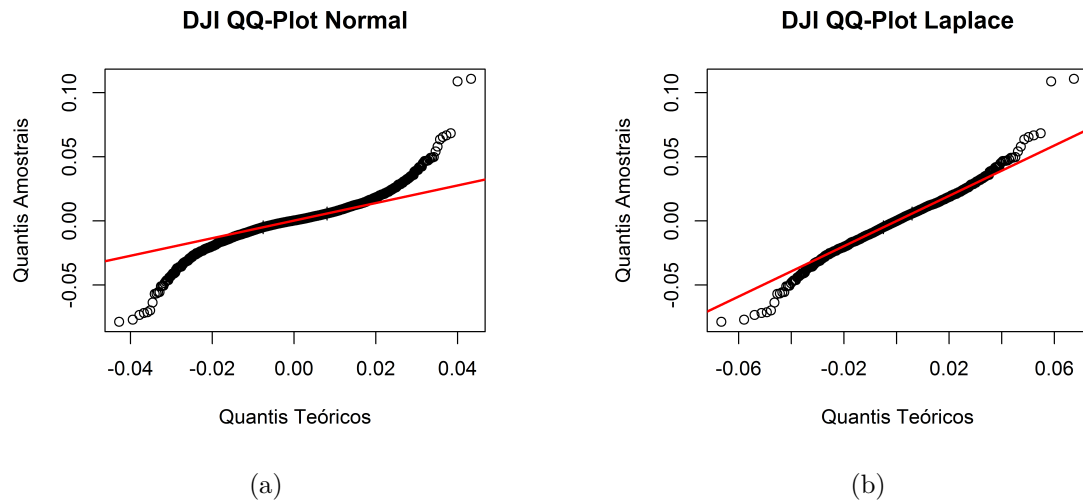


Figura 10: Adequação da série de retornos da DJI as distribuições Normal e de Laplace

A Figura 11 mostra o histograma dos retornos da DJI, e seu ajuste as distribuições Normal e Laplace.

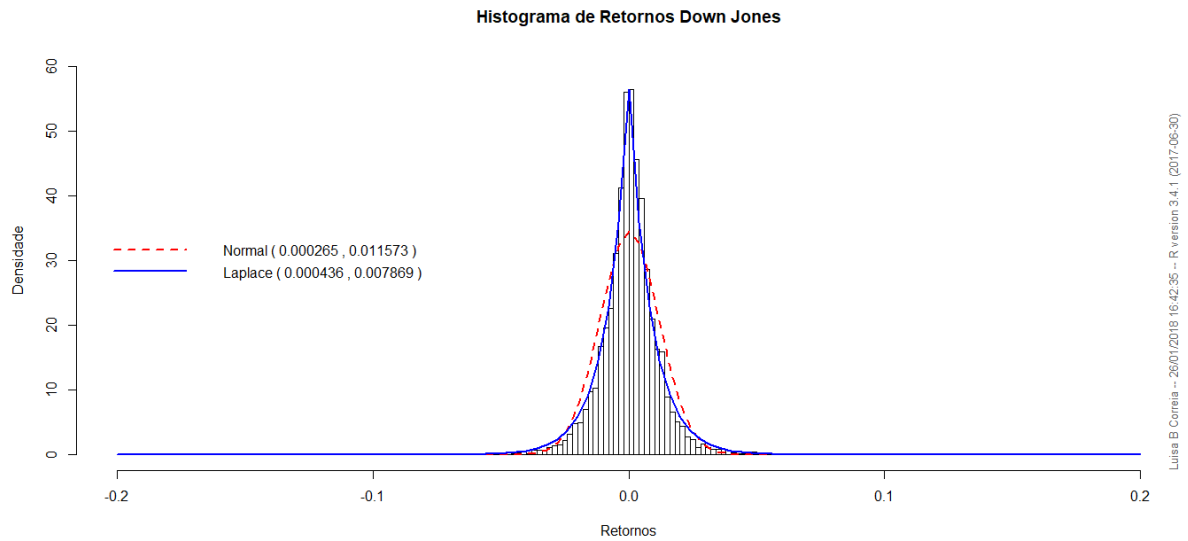


Figura 11: Histograma da série de retornos do DJI e ajuste das distribuições Normal e Laplace

Tendo em mão qual a distribuição a qual os dados melhor se adequam, pode-se calcular o VaR paramétrico, utilizando a distribuição de Laplace, onde 0,43% das amostras foram rejeitadas (pontos que apresentam $P_Lap < 0.05$), como demonstra a Figura 12. Nestes pontos o valor calculado para o VaR pode estar sub ou sobrestimado, uma vez que a distribuição utilizada não é a que os dados melhor se adequam.

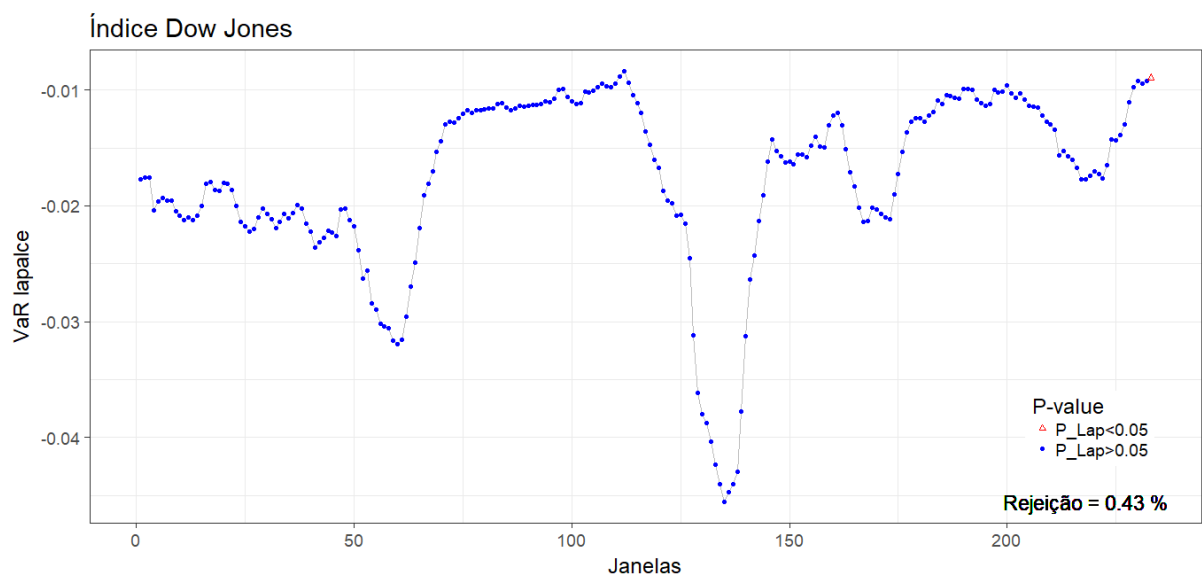


Figura 12: Valores do VaR Laplaciano e índice de rejeição do DJI

O modelo ARIMA final apresentou a configuração ARIMA(1,1,0), indica um modelo de ordem 1 para o componente AR, ordem 1 para o componente Integração e 0 para o componente MA. Após o teste do desempenho preditivo, obteve-se um MAPE de 20,58%, que significa que o valor que nosso modelo prediz para até 24 meses a frente, caso esteja errado, será em no máximo 20,58%, como mostra a Figura 13. Neste gráfico vemos que intervalo de predição (IP) estimado onde o VaR tem a probabilidade de ocorrer de 80% (cinza escuro) e 95% (cinza claro).

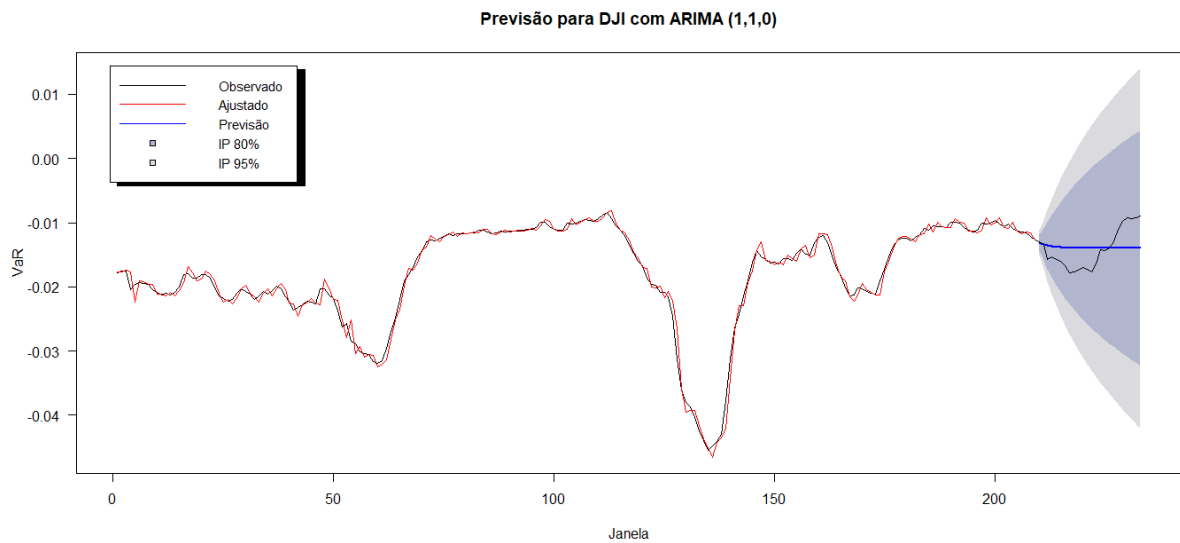


Figura 13: Gráfico de série temporal dos valores calculados do VaR e modelo ARIMA (em vermelho) com sua previsão e intervalos de confiança para o DJI

Ibovespa - Brasil

Índice Bovespa (Ibovespa) é o mais importante indicador do desempenho médio das cotações das ações negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo. É formado pelas ações com maior volume negociado nos últimos meses. O valor atual representa a quantia, em moeda corrente, de uma carteira teórica de ações, constituída em 2 de janeiro de 1968, a partir de uma aplicação hipotética. Atribuiu-se o valor-base de 100 a um lote-padrão cujo carteira se avoluma sem receber mais nenhum aporte, com o acréscimo exclusivo de proventos gerados pelas ações que compõem o lote-padrão tais como a reinversão de dividendos, exercício de direitos e recebimento de bonificações.

Na Bovespa, os investidores podem negociar ações de aproximadamente 500 empresas diferentes. Entre elas AmBev, Banco do Brasil, Banco Santander, Bradesco, Braskem, Cielo, Companhia Energética de Minas Gerais, Companhia Energética de São Paulo,

Companhia Hering, Companhia Paranaense de Energia, Sabesp, Companhia Siderúrgica Nacional, Cosan, Eletrobras, Embraer, Gerdau, Gol Linhas Aéreas Inteligentes, Itaú Unibanco, JBS, Localiza, Lojas Renner, Marcopolo, MRV Engenharia, Natura, Oi, Petrobras, Suzano Papel e Celulose, Telefônica Brasil, TIM Brasil, Usiminas e Vale S.A..

Foram usados os registros diários valores de fechamento das ações negociadas durante o período de 07 de julho de 1997 a 05 de junho de 2017, totalizando 4929 pontos. Após a interpolação para preenchimento dos dias faltantes a série passou a contar com 5120 pontos. A Figura 14 mostra o gráfico dessa série nesse período. Após o cálculo dos retornos normalizados, temos a série de retornos como mostra a Figura 15.

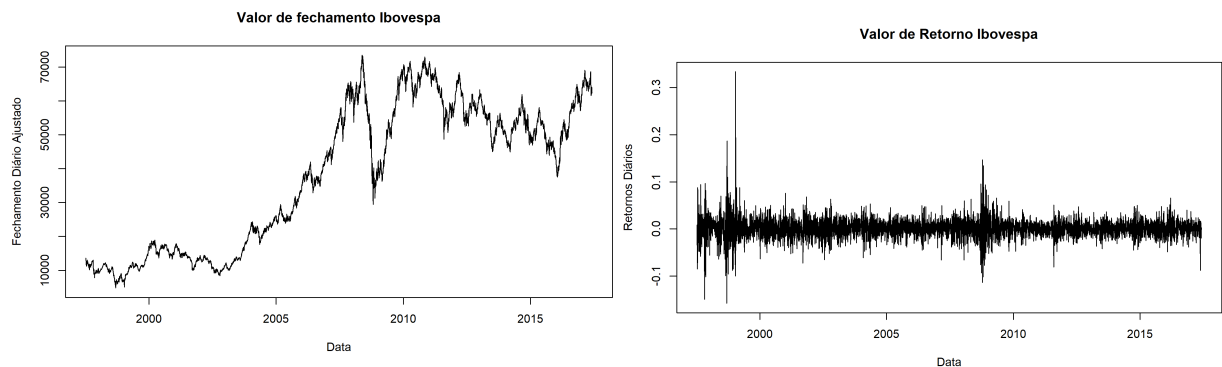


Figura 14: Série de fechamento da IBOVESPA - Figura 15: Série de retornos do IBOVESPA

As séries de fechamento (Tabela 7) e de retornos (Tabela 8) apresentam as seguintes estatísticas básicas:

Tabela 7: Estatística da série de fechamento do IBOVESPA

Estatística	Valor
Mínimo	4761,00
Mediana	41576,50
Média	37932,73
Máximo	73517,00
Desvio Padrão	21016,42
Amplitude	68756,00

Tabela 8: Estatística da série de retornos do IBOVESPA

Estatística	Valor
Mínimo	-0,15809
Mediana	0,00078
Média	0,00053
Máximo	0,33419
Desvio Padrão	0,02096
Amplitude	0,49228

Após fazer o teste de Aderência de Kolmogorov-Smirnov, verificou-se que a distribuição de Laplace se adequa melhor aos dados em detrimento da Normal, mesmo considerando os períodos de crise, como se pode ver na Tabela 9 e nas figuras 16(a) e 16(b).

Tabela 9: Critérios de seleção de Modelos da IBOVESPA

Critérios	Laplace	Normal
AIC	-164492,28	-24107,68
AICc	-164492,28	-24107,68
BIC	-164479,28	-24094,67

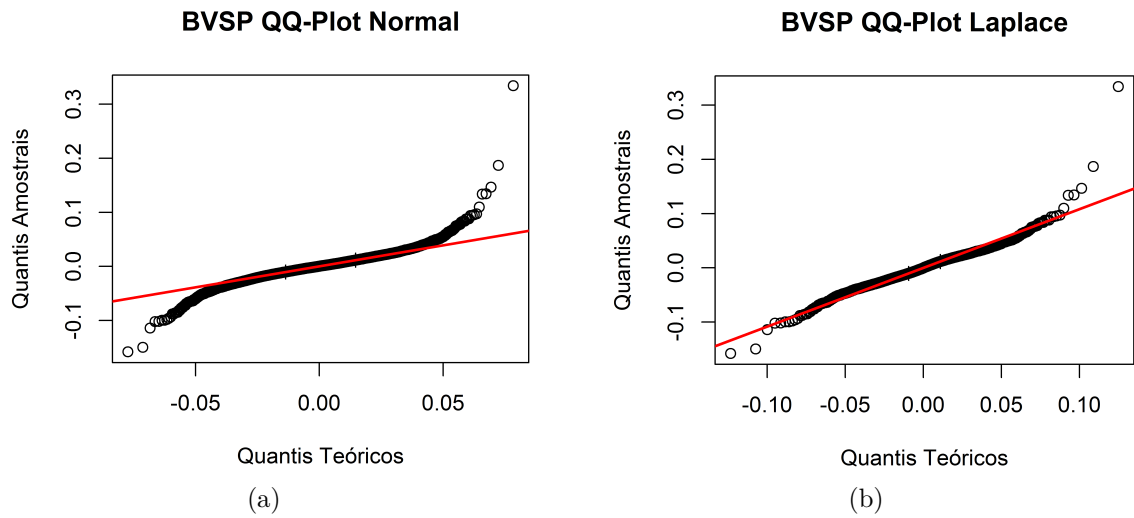


Figura 16: Adequação da série de retornos da IBOVESPA as distribuições Normal e de Laplace

A Figura 17 mostra o histograma dos retornos da IBOVESPA, e seu ajuste as distribuições Normal e Laplace.

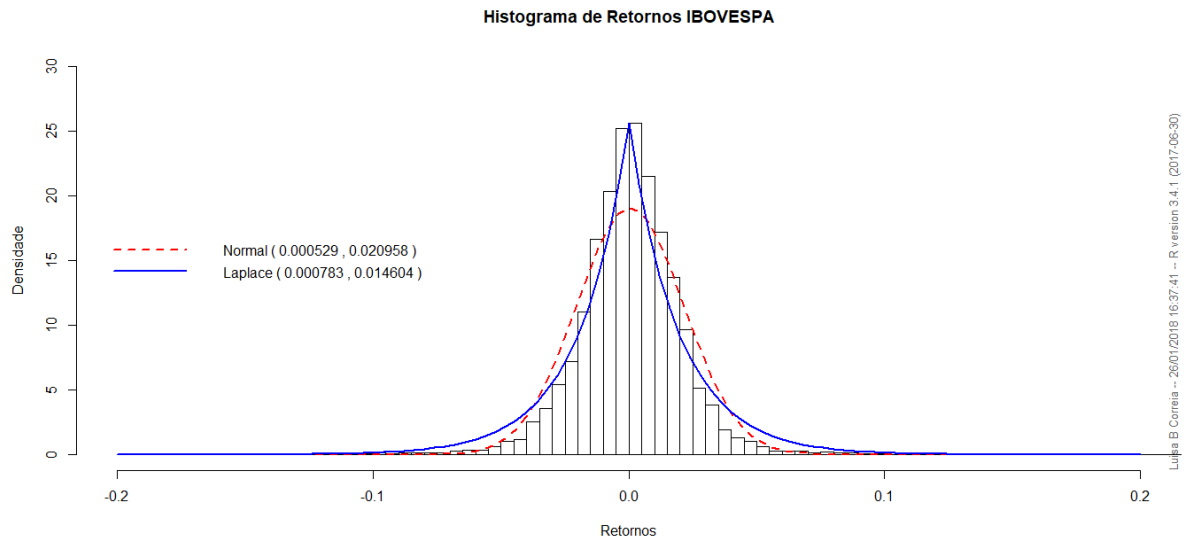


Figura 17: Histograma da série de retornos do IBOVESPA e ajuste das distribuições Normal e Laplace

Tendo em mão qual a distribuição a qual os dados melhor se adequam, pode-se calcular o VaR paramétrico, utilizando a distribuição de Laplace, onde 1,72% das amostras foram rejeitadas (pontos que apresentam $P_Lap < 0.05$), como demonstra a Figura 18. Nestes pontos o valor calculado para o VaR pode estar sub ou sobrestimado, uma vez que a distribuição utilizada não é a que os dados melhor se adequam.

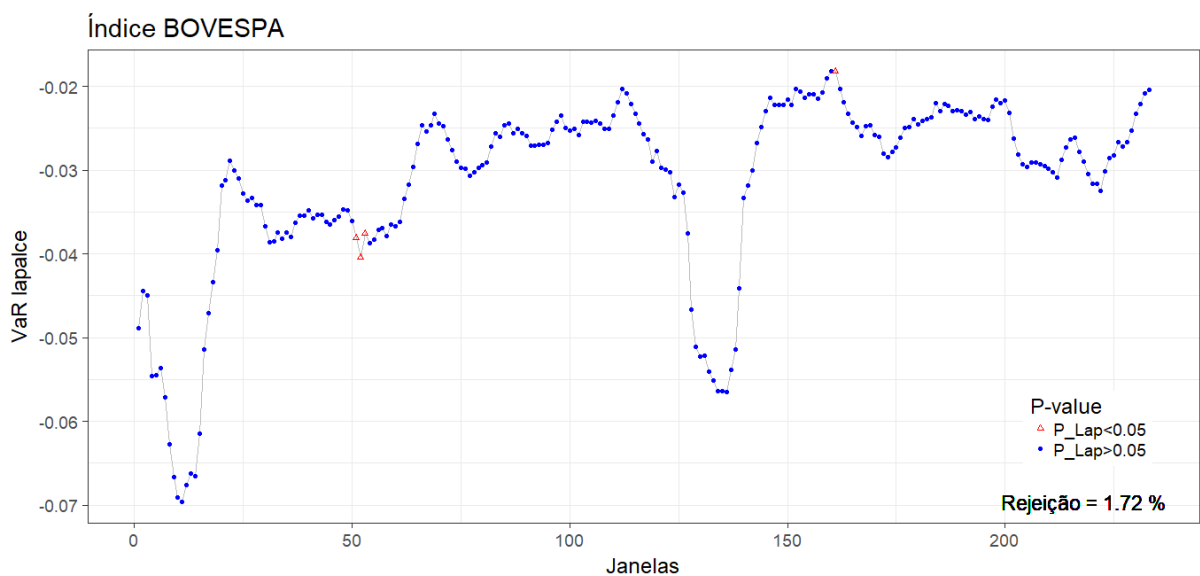


Figura 18: Valores do VaR Laplaciano e índice de rejeição do IBOVESPA

O modelo ARIMA final apresentou a configuração ARIMA(4,1,2), indica um modelo de ordem 4 para o componente AR, ordem 1 para o componente Integração e 2 para o componente MA. Após o teste do desempenho preditivo, obteve-se um MAPE de 13,73%, que significa que o valor que nosso modelo prediz para até 24 meses a frente, caso esteja errado, será em no máximo 13,73%, como mostra a Figura 19. Neste gráfico vemos que intervalo de predição (IP) estimado onde o VaR tem a probabilidade de ocorrer de 80% (cinza escuro) e 95% (cinza claro).

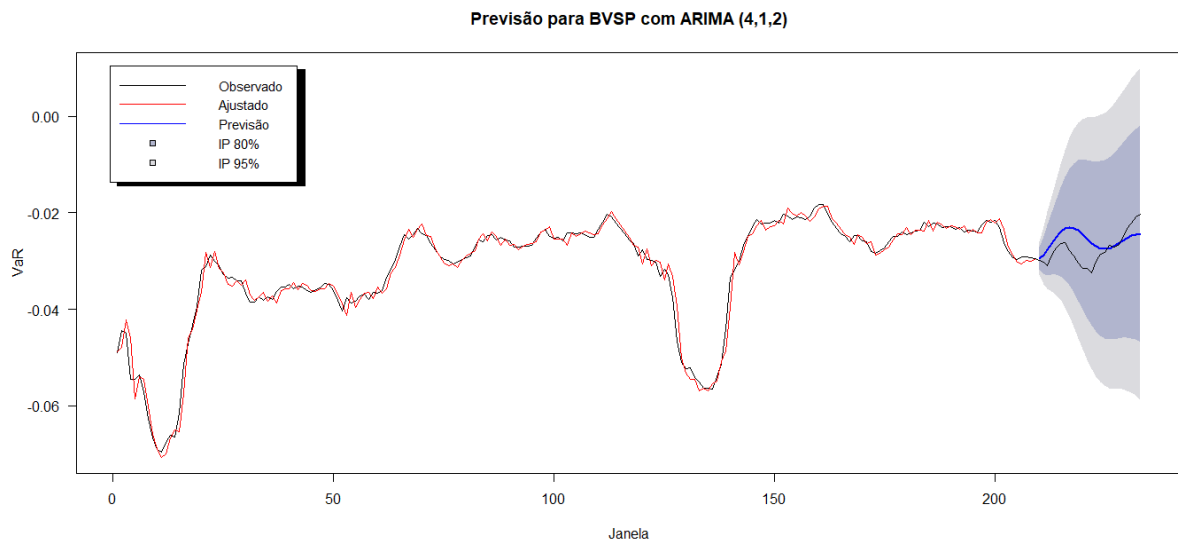


Figura 19: Gráfico de série temporal dos valores calculados do VaR e modelo ARIMA (em vermelho) com sua previsão e intervalos de confiança para a IBOVESPA

Índice de Preços e Cotações - México (IPC)

A Bolsa Mexicana de Valores (BVM), é a única bolsa de valores do México. É a segunda maior bolsa de valores por capitalização de mercado na América Latina. A BMV é agora uma empresa pública que está listada em sua própria bolsa de valores após um IPO em 2008. O *Índice de Precios y Cotaciones* (IPC) é um índice ponderado que mostra o comportamento das empresas mais influentes da *Mexican Stock Exchange* - Bolsa Mexicana de Valores (BVM).

A Bolsa Mexicana de Valores negocia ativamente ações, debêntures, instrumentos de dívida (títulos governamentais e corporativos) e warrants e outros derivativos. A negociação é realizada em um sistema de comércio totalmente eletrônico, denominado Sistema de Ações BMV-SENTRA. Muitas das empresas conhecidas do México estão listadas na Bolsa de Valores do México, como Cemex, Telmex, América Móvel, Televisa, TV Azteca e

Walmex. Algumas das maiores empresas da Bolsa de Valores mexicanas também negociam em mercados de ações dos EUA como ADRs.

Foi usado os registros diários valores de fechamento das ações negociadas durante o período de 07 de julho de 1997 a 05 de junho de 2017, totalizando 5076 pontos. Após a interpolação para preenchimento dos dias faltantes a série passou a contar com 5120 pontos. A Figura 20 mostra o gráfico dessa série nesse período. Após o cálculo dos retornos normalizados, temos a serie de retornos como mostra a Figura 21.

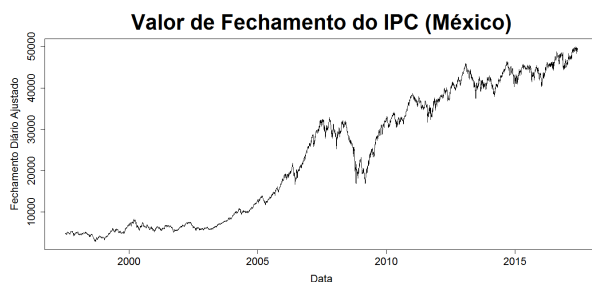


Figura 20: Série de fechamento do MXX

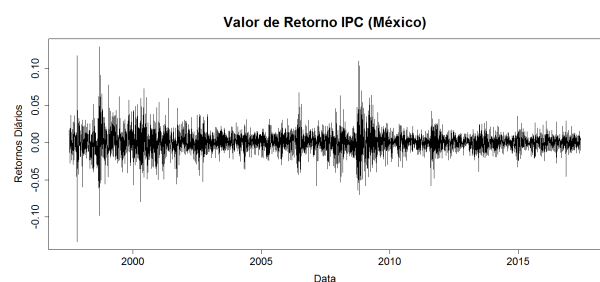


Figura 21: Série de retornos do MXX

As séries originais (Tabela 10) e de retornos (Tabela 11) apresentam as seguintes estatísticas básicas

Tabela 10: Estatística da série de fechamento do MXX

Estatística	Valor
Mínimo	2856,10
Mediana	23360,68
Média	23510,15
Máximo	49939,47
Desvio Padrão	15482,66
Amplitude	47083,37

Tabela 11: Estatística da série de retornos MXX

Estatística	Valor
Mínimo	-0,1333713
Mediana	0,0007452
Média	0,0005750
Máximo	0,1292305
Desvio Padrão	0,0144678
Amplitude	0,2626018

Após fazer o teste de Aderência de Kolmogorov-Smirnov, verificou-se que a distribuição de Laplace se adequa melhor aos dados em detrimento da Normal, mesmo considerando os períodos de crise, como se pode ver na Tabela 12 e nas figuras 22(a) e 22(b).

Tabela 12: Critérios de seleção de Modelos da MXX

Critérios	Laplace	Normal
AIC	-250108,43	-28109,55
AICc	-250108,43	-28109,55
BIC	-250095,40	-28096,52

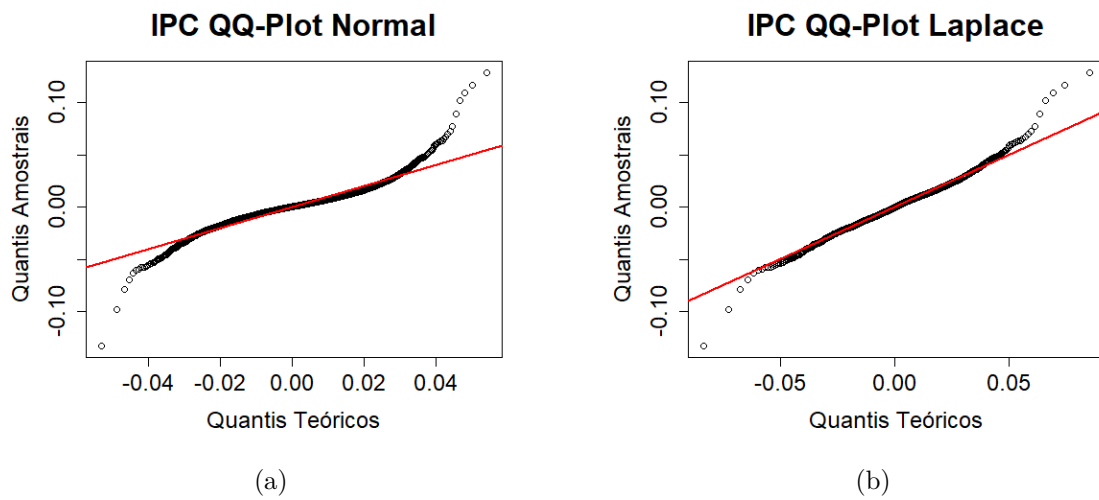


Figura 22: Adequação da série de retornos da MXX as distribuições Normal e de Laplace

A Figura 23 mostra o histograma dos retornos da MXX, e seu ajuste as distribuições Normal e Laplace.

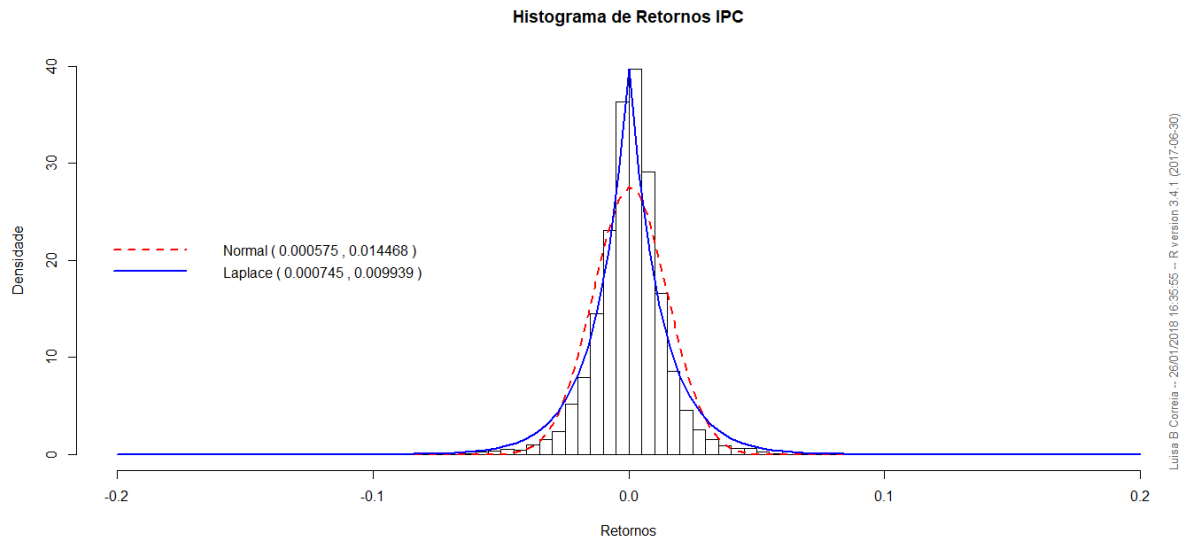


Figura 23: Histograma da série de retornos do MXX e ajuste das distribuições Normal e Laplace

Tendo em mão qual a distribuição a qual os dados melhor se adequam, pode-se calcular o VaR paramétrico, utilizando a distribuição de Laplace, onde 0,43% das amostras foram rejeitadas (pontos que apresentam $P_{Lap} < 0.05$), como demonstra a Figura 24. Nestes pontos o valor calculado para o VaR pode estar sub ou sobrestimado, uma vez que a distribuição utilizada não é a que os dados melhor se adequam.

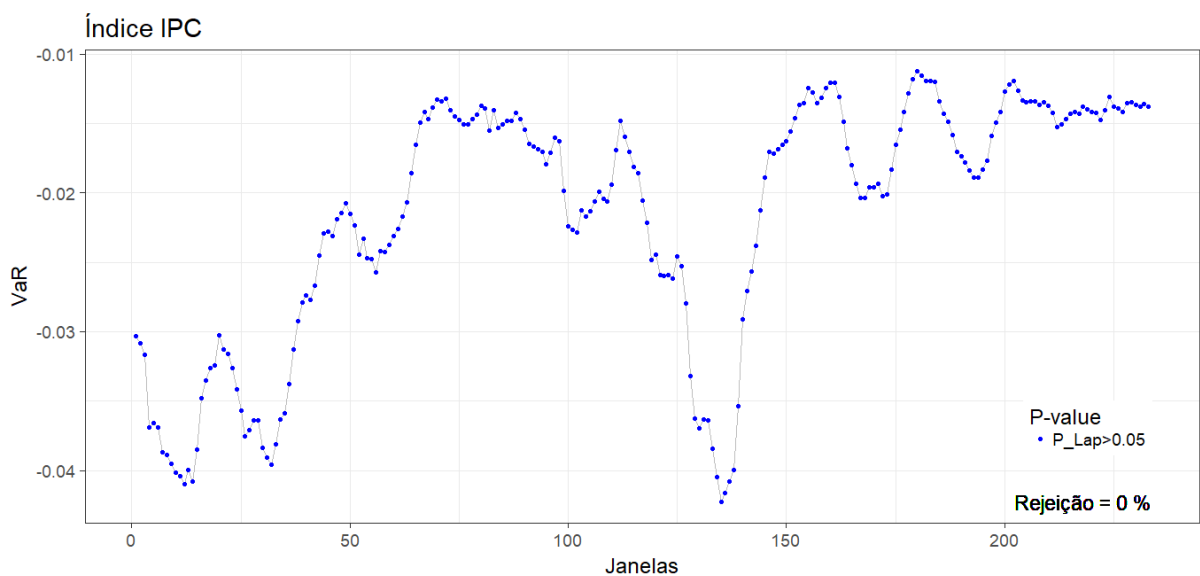


Figura 24: Valores do VaR Laplaciano e índice de rejeição do MXX

O modelo ARIMA final apresentou a configuração ARIMA(1,1,0), indica um modelo de ordem 1 para o componente AR, ordem 1 para o componente Integração e 0 para o componente MA. Após o teste do desempenho preditivo, obteve-se um MAPE de 5,95%, que significa que o valor que nosso modelo prediz para até 24 meses a frente, caso esteja errado, será em no máximo 5,95%, como mostra a Figura 25. Neste gráfico vemos que intervalo de predição (IP) estimado onde o VaR tem a probabilidade de ocorrer de 80% (cinza escuro) e 95% (cinza claro).

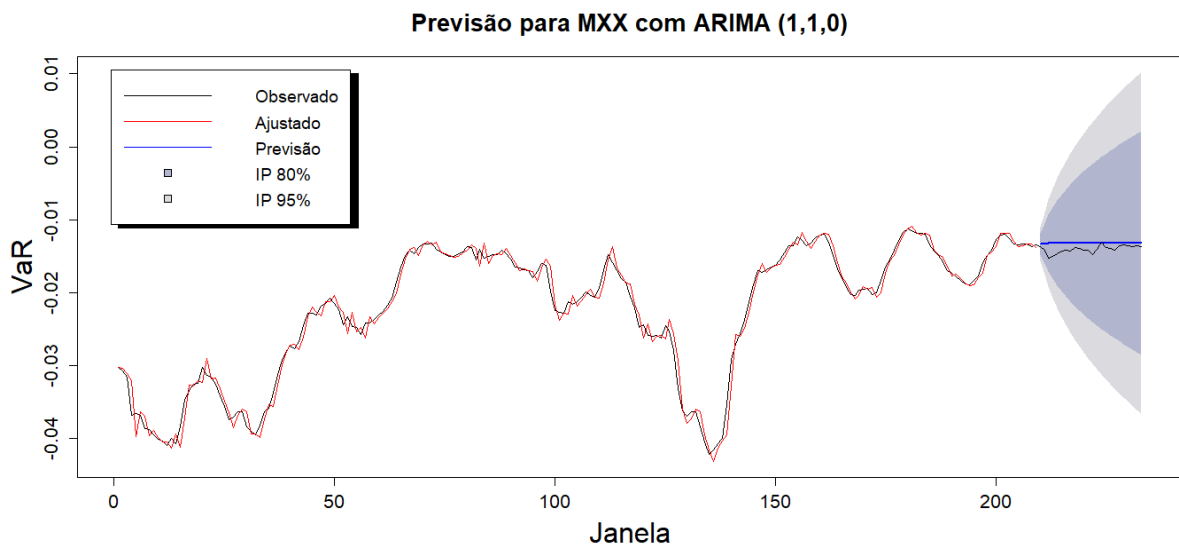


Figura 25: Gráfico de série temporal dos valores calculados do VaR e modelo ARIMA (em vermelho) com sua previsão e intervalos de confiança para o MXX

Nikkei - Japão (N225)

Atualmente, o Nikkei é a média mais cotada das ações japonesas, semelhante à Dow Jones Industrial Average . O Nikkei 225 Futures, introduzido na Singapore Exchange (SGX) em 1986, a Osaka Securities Exchange (OSE) em 1988, Chicago Mercantile Exchange (CME) em 1990, é agora um índice de futuros internacionalmente reconhecido. Conta atualmente com 226 empresas para a composição de seu índice, dentre as quais as multinacionais: Ajinomoto Co., Inc., Bridgestone Corp., Casio Computer Co., Ltd., Fujifilm Holdings Corp., Honda Motor Co., Ltd, Kyocera Corp., Mitsubishi Motors Corp., Nissan Motors Co., Ltd., Panasonic Corp., Pioneere Corporation, Sony Corp., Toshiba Corp., Toyota Motor Corp., Yamaha Motor Corp.

Foi usado os registros diários valores de fechamento das ações negociadas durante o período de 07 de julho de 1997 a 05 de junho de 2017, totalizando 5076 pontos. Após

a interpolação para preenchimento dos dias faltantes a série passou a contar com 5120 pontos. A Figura 26 mostra o gráfico dessa série nesse período. Após o cálculo dos retornos normalizados, temos a série de retornos como mostra a Figura 27.

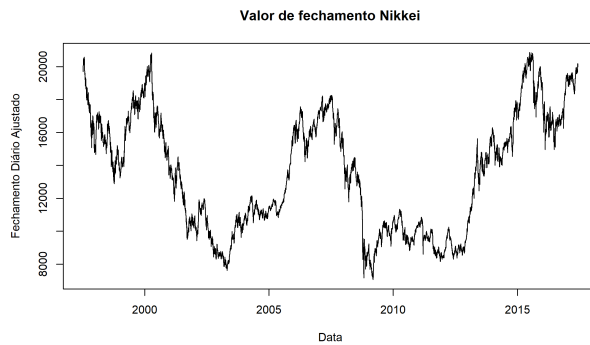


Figura 26: Série de fechamento do N225

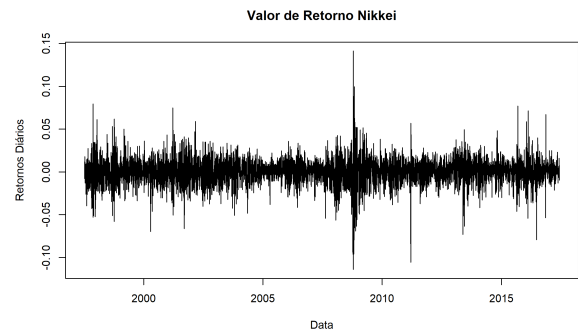


Figura 27: Série de retornos do N225

As séries de fechamento (Tabela 13) e de retornos (Tabela 14) apresentam as seguintes estatísticas básicas

Tabela 13: Estatística da série de fechamento da N225

Estatística	Valor
Mínimo	7054,98
Mediana	13664,38
Média	13541,95
Máximo	20868,03
Desvio Padrão	3543,84
Amplitude	13813,05

Tabela 14: Estatística da série de retornos N225

Estatística	Valor
Mínimo	-0,1140637
Mediana	0,0003228
Média	0,0001218
Máximo	0,1415031
Desvio Padrão	0,0155084
Amplitude	0,2555668

Após fazer o teste de Aderência de Kolmogorov-Smirnov, verificou-se que a distribuição de Laplace se adequa melhor aos dados em detrimento da Normal, mesmo considerando os períodos de crise, como se pode ver na Tabela 15 e nas figuras 28(a) e 28(b).

Tabela 15: Critérios de seleção de Modelos da N225

Critérios	Laplace	Normal
AIC	-214368,82	-26822,97
AICc	-214368,82	-26822,96
BIC	-214355,83	-26809,98

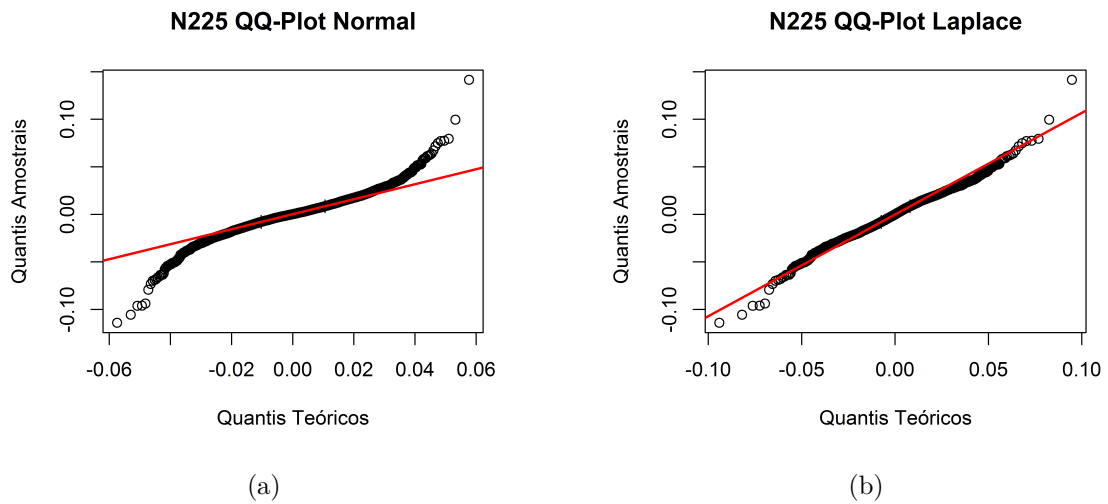


Figura 28: Adequação da série de retornos da N225 as distribuições Normal e de Laplace

A Figura 29 mostra o histograma dos retornos da N225, e seu ajuste as distribuições Normal e Laplace.

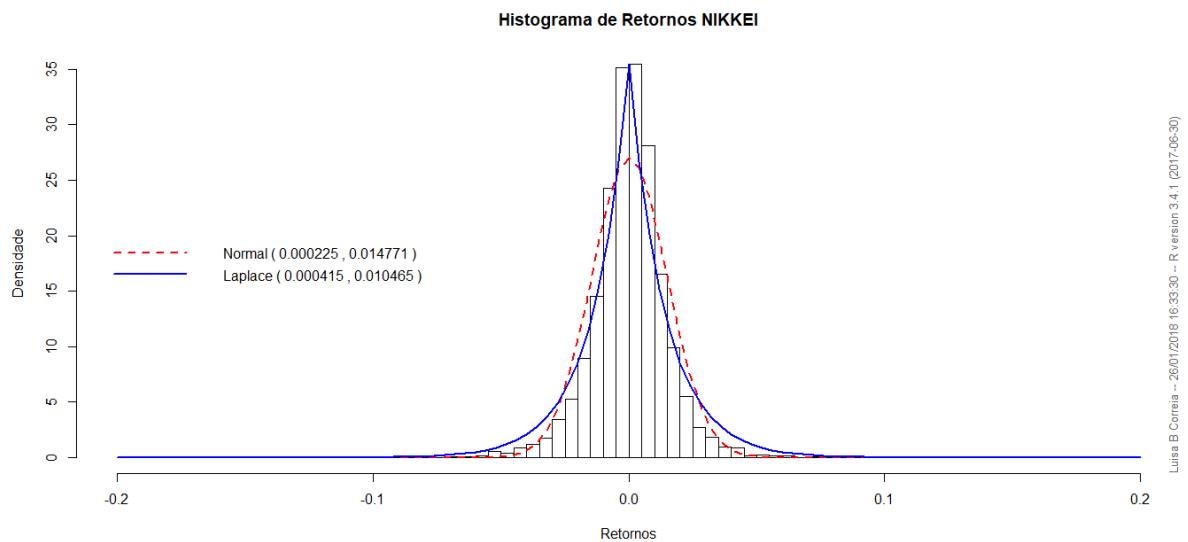


Figura 29: Histograma da série de retornos do N225 e ajuste das distribuições Normal e Laplace

Tendo em mão qual a distribuição a qual os dados melhor se adequam, pode-se calcular o VaR paramétrico, utilizando a distribuição de Laplace, onde 1,72% das amostras foram rejeitadas (pontos que apresentam $P_{Lap} < 0.05$), como demonstra a Figura 30.

Nestes pontos o valor calculado para o VaR pode estar sub ou sobrestimado, uma vez que a distribuição utilizada não é a que os dados melhor se adequam.

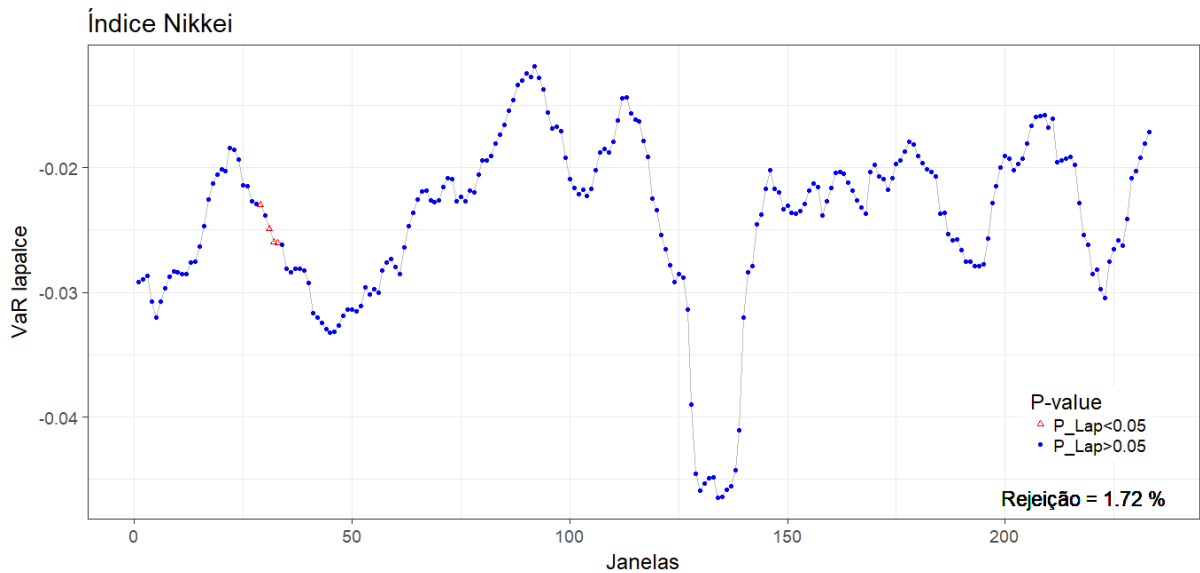


Figura 30: Valores do VaR Laplaciano e índice de rejeição do N225

O modelo ARIMA final apresentou a configuração ARIMA(2,0,2), indica um modelo de ordem 2 para o componente AR, ordem 0 para o componente Integração e 2 para o componente MA. Após o teste do desempenho preditivo, obteve-se um MAPE de 16,48%, que significa que o valor que nosso modelo prediz para até 24 meses a frente, caso esteja errado, será em no máximo 16,48%, como mostra a Figura 31. Neste gráfico vemos que intervalo de predição (IP) estimado onde o VaR tem a probabilidade de ocorrer de 80% (cinza escuro) e 95% (cinza claro).

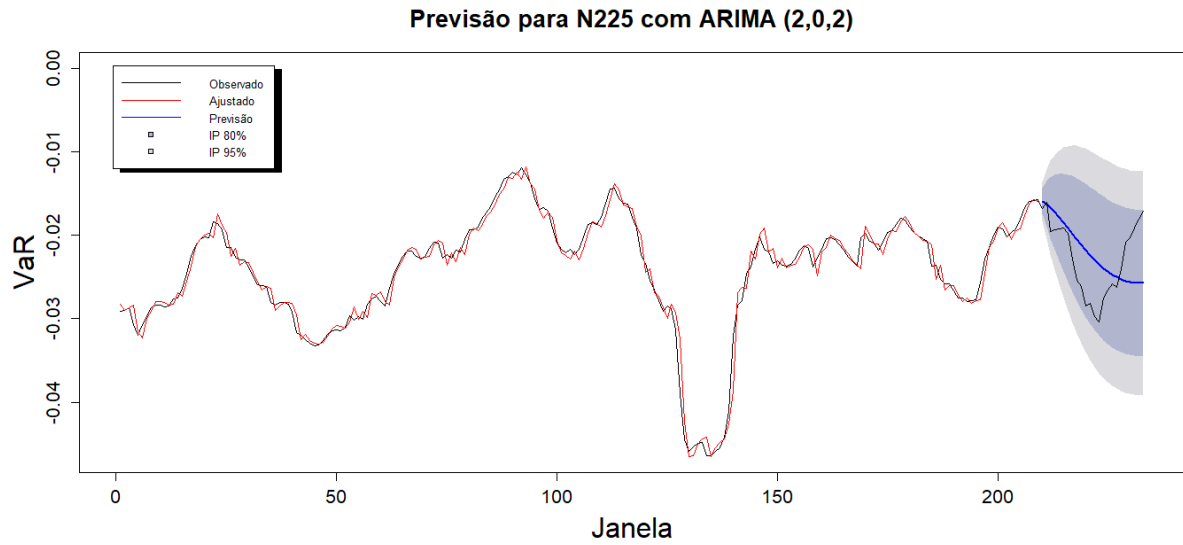


Figura 31: Gráfico de série temporal dos valores calculados do VaR e modelo ARIMA (em vermelho) com sua previsão e intervalos de confiança para o N225

4.2 Outros índices

Todos os 25 índices foram estudados e analisados da mesma maneira, e apresentaram bons resultados, tanto para a aceitação da distribuição de Laplace, como a distribuição a qual os dados melhor se adequam, e também apresentaram um modelo ARIMA simples porém com boa capacidade de predição a longo prazo. A tabela 16 apresenta os resultados obtidos para os outros índices que não foram apresentados em detalhes.

Tabela 16: Modelos ARIMAS para os vinte e cinco índices das bolsas

Índice	Rejeição do VaR Normal	Rejeição do VaR Laplace	Modelo ARIMA	MAPE da previsão	MAPE do ajuste
aex	6,44%	0,86%	(1,1,0)	19,36%	4,53%
bfx	15,45%	1,29%	(2,0,0)	12,84%	5,09%
bsesn	12,88%	2,15%	(2,1,0)	12,60%	4,19%
bux	11,16%	0,00%	(1,1,0)	11,80%	3,72%
bvsp	13,73%	1,72%	(4,1,2)	10,57%	3,81%
cse	65,67%	2,15%	(1,1,1)	7,92%	5,24%
dji	24,89%	0,43%	(1,1,0)	20,58%	3,82%
fchi	5,58%	2,58%	(2,0,0)	16,40%	3,91%
gdaxi	11,59%	0,00%	(1,1,1)	17,69%	4,10%
gspc	27,04%	0,43%	(2,0,2)	31,46%	3,97%
gsptse	13,30%	0,43%	(5,0,3)	25,89%	3,92%
hsi	8,15%	1,29%	(4,1,4)	23,13%	3,50%
ibex	8,58%	1,72%	(4,0,0)	12,20%	4,23%
jkse	38,63%	4,72%	(4,1,4)	18,32%	4,06%
ks11	13,30%	0,00%	(2,1,0)	14,79%	3,83%
merv	33,05%	0,43%	(4,1,0)	23,90%	4,04%
mxx	8,58%	0,00%	(1,1,0)	5,95%	3,86%
n225	12,45%	1,72%	(2,0,2)	16,48%	3,44%
ndx	18,88%	3,43%	(1,1,0)	20,48%	3,75%
ssec	63,09%	2,15%	(2,0,1)	27,15%	3,82%
stoxx50e	7,73%	1,29%	(3,0,1)	17,64%	4,04%
twii	24,46%	0,43%	(1,1,0)	13,89%	3,76%
vix	38,63%	7,30%	(0,1,1)	11,78%	3,36%
xmi	19,31%	3,43%	(2,0,2)	28,59%	3,80%
xu100.is	28,33%	13,73%	(5,2,1)	31,98%	3,74%

5 Conclusão

Os índices estudados apresentaram uma melhor aderência, quando testados contra uma distribuição de Laplace em detrimento da distribuição Normal, indicando assim que para o cálculo do VaR paramétrico considerar uma mudança de distribuições pode gerar dados mais robustos para uma tomada de decisão.

Dos 25 índices estudados apenas o xu100.is, da Turquia, apresentou rejeição a mais de 10% dos dados, quando consideramos uma Distribuição de Laplace, enquanto 19 índices rejeitaram mais de 10% dos dados com a Distribuição Normal, chegando até a uma rejeição de 65,67% dos dados, como foi o caso do cse, do Sri Lanka.

Em relação ao modelo ARIMA, os índices estudados apresentaram fator de Integração de no máximo 1, o que quer dizer que as séries, formadas pelos valores do VaR calculados com a distribuição de Laplace, precisaram de no máximo uma diferenciação para se transformarem em séries estacionárias.

Com relação ao Erro Percentual Absoluto Médio, que é a medida com a qual se avalia o método e previsão, no nosso caso os modelos ARIMA, apenas o índice xu100.is, apresentou um MAPE elevado de 31,98%, indicando que mesmo uma rejeição menor a distribuição de Laplace em detrimento a Normal, esta talvez não seja ainda a distribuição mais adequada para se trabalhar com esse índice específico.

Esses resultados demonstram que um ajuste na distribuição correta dos dados evita sub e sobrestimação dos dados, que podem gerar perdas financeiras. É interessante ainda testar outras distribuições de probabilidade para comparar com esses resultados obtidos e observar o nível de adequação de cada uma, bem como analisar se existe uma única distribuição que se adequa a maioria dos mercados.

Embora apenas duas distribuições tenham sido testadas, existem ainda muitas outras, e obviamente, este trabalho não esgota a busca das distribuições, especialmente para aqueles ativos que não obtiveram expressiva aderência à distribuição de Laplace. Porém, os testes realizados até o presente momento corroboram para o fato de que o pressuposto de aderência a distribuição de Laplace é aplicável com boa confiança.

5.1 Trabalhos Futuros

Para trabalhos futuros pretende-se avaliar outras distribuições de probabilidade, outros índices financeiros, bem como outros métodos de calcular o VaR, e outros modelos da família VaR, tais como o *Conditional VaR* (CVaR). Também serão testados outros modelos de previsão de séries temporais, os modelos heterocedásticos como o ARCH (sigla em inglês para Autoregressivo de Heteroscedasticidade Condicional) e o GARCH (sigla em inglês para Autoregressivo de Heteroscedasticidade Condicional Generalizado). Sempre em busca de fornecer um instrumento de tomada de decisão mais preciso.

Referências Bibliográficas

- AKAIKE, H. Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. pages 267–281 in. In: **International Symposium on Information Theory.**(BN Petran and F. Csaki, Eds.). Akademiai Kiado, Budapest. [S.l.: s.n.], 1973.
- ALARCON, C. M. et al. Avaliação de modelos de value at risk para ações. Campinas, SP, 2005.
- ARAÚJO, M. **Simulação de Monte Carlo para Cálculo do Var: o Uso da Amostragem Descritiva.** 2001. 120p. Dissertação (Mestrado) — Dissertação (Mestrado em Administração)-Instituto COPPEAD de Administração, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2001.
- ASSAF NETO, A. **Mercado Financeiro.** 9. ed. [S.l.]: Editora Atlas, 2009. ISBN 9788522454365.
- BALI, T. G. An extreme value approach to estimating volatility and value at risk. **The Journal of Business**, JSTOR, v. 76, n. 1, p. 83–108, 2003.
- BECKER, J. **Estatística Básica: Transformando Dados em Informação.** Bookman Editora, 2015. ISBN 9788582603130. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=ZydqBgAAQBAJ>>.
- BOX, G. E. et al. **Time series analysis: forecasting and control.** [S.l.]: John Wiley & Sons, 2015.
- BURNHAM, K. P.; ANDERSON, D. Model selection and multi-model inference. Taylor & Francis, 2003.
- BUSSAB, W. de O.; MORETTIN, P. **Estatística básica.** Saraiva, 2009. ISBN 9788502034976. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=CaztAQAACAAJ>>.
- CAPELLE-BLANCARD, G.; CHAUDHURY, M. Efficiency tests of the french index (cac 40) options market. 2001.
- CARBONE, A.; CASTELLI, G.; STANLEY, H. Time-dependent hurst exponent in financial time series. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 344, n. 1, p. 267–271, 2004.
- CARLIN, B. P.; LOUIS, T. A. **Bayes and empirical Bayes methods for data analysis.** [S.l.]: Chapman & Hall/CRC Boca Raton, FL, 2000. v. 17.
- DANIELSSON, J.; VRIES, C. G. D. Value-at-risk and extreme returns. **Annales d’Economie et de Statistique**, JSTOR, p. 239–270, 2000.

DEGROOT, M.; SCHERVISH, M. **Probability and Statistics**. [S.l.]: Addison-Wesley, 2002. ISBN 9780201524888.

DELIGNETTE-MULLER, M. L.; DUTANG, C. **fitdistrplus: An R package for fitting distributions**. **Journal of Statistical Software**, v. 64, n. 4, p. 1–34, 2015. Disponível em: <<http://www.jstatsoft.org/v64/i04/>>.

DEVILLE, L. Time to efficiency of the french cac 40 index options market. 2003.

DOWD, K. Beyond value at risk: the new science of risk management. John Wiley & Sons, 1998.

DUARTE JÚNIOR, A. M. **Risco: Definições, tipos, medição e recomendações para seu gerenciamento**. 1993.

FERREIRA, A. de H.; FERREIRA, M.; ANJOS, M. dos. **Novo dicionário Aurélio da língua portuguesa**. [S.l.]: Editora Positivo, 2004. ISBN 9788574724140.

FREITAS, W. **bizdays: Business Days Calculations and Utilities**. [S.l.], 2017. R package version 1.0.3. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=bizdays>>.

GLUCKSTERN, M. C.; FRANCISCO, G.; JR, W. E. Aplicação do modelo hull-white à precificação de opções sobre idi. In: **Second Meeting of the Brazilian Society of Finance**. [S.l.: s.n.], 2002.

HURVICH, C. M.; TSAI, C.-L. Regression and time series model selection in small samples. **Biometrika**, Oxford University Press, v. 76, n. 2, p. 297–307, 1989.

HYNDMAN, R. J. **forecast: Forecasting functions for time series and linear models**. [S.l.], 2017. R package version 8.1. Disponível em: <<http://github.com/robjhyndman/forecast>>.

JORION, P. **Value at risk: a nova fonte de referência para a gestão do risco financeiro**. [S.l.]: Bolsa de Mercadorias & Futuros, 2003. ISBN 9788574380070.

KOMSTA, L.; NOVOMESTKY, F. **moments: Moments, cumulants, skewness, kurtosis and related tests**. [S.l.], 2015. R package version 0.14. Disponível em: <<http://CRAN.R-project.org/package=moments>>.

LI, D. X. Value at risk based on the volatility, skewness and kurtosis. **RiskMetrics Group**, 1999.

LIU, D. et al. Entropy of hydrological systems under small samples: Uncertainty and variability. **Journal of Hydrology**, Elsevier, v. 532, p. 163–176, 2016.

MALETTA, B. V.; COELHO, F. H. d. S. **Modelos baseados em Simulação de Monte Carlo: soluções para o cálculo do Value-at-Risk**. Dissertação (Mestrado) — Dissertação (Mestrado em Administração), 2005.

MANGANELLI, S.; ENGLE, R. F. Value at risk models in finance. 2001.

- MORAIS, M. A evolução da bolsa de valores como instrumento do mercado de capitais. 1989.
- MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. M. de C. **Modelos para previsão de séries temporais**. [S.l.]: Instituto de matemática pura e aplicada, 1981. v. 1.
- MORGAN, J. et al. Riskmetrics technical document. New York, 1996.
- PESSANHA, J. A. M. **Ética a Nicômaco - seleção de textos**. 4. ed. [S.l.]: Nova Cultural, 1991. v. 2. ISBN 8513002321.
- PINDYCK, R. S.; RUBINFELD, D. L. **Econometria: modelos & previsões**. [S.l.]: Elsevier, 2004.
- R Core Team. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. Vienna, Austria, 2017. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>.
- RYAN, J. A.; ULRICH, J. M. **xts: eXtensible Time Series**. [S.l.], 2017. R package version 0.10-0. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=xts>>.
- SCHWARZ, G. et al. Estimating the dimension of a model. **The annals of statistics**, Institute of Mathematical Statistics, v. 6, n. 2, p. 461–464, 1978.
- SECURATO, J. **Decisões financeiras em condições de risco**. [S.l.]: Saint Paul, 1996.
- SIEGEL S. ; CASTELLAN, N. J. **Estatística não-paramétrica para as ciências do comportamento**. [S.l.]: Artmed, 2006.
- SINGER, P. **Aprender economia**. Editora Contexto, 2002. ISBN 9788572445528. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=w9NnAwAAQBAJ>>.
- SOUZA, L. A. R. d. **Valor em risco em épocas de crise. 1999. 122 p.** Tese (Doutorado) — Dissertação (Mestrado em Economia)—Universidade Federal de São Paulo, São Paulo, SP, 1999.
- TOLENS, P. **Política**. [S.l.]: Martins Claret, 2001. ISBN 9788572324564.
- TRAPLETTI, A.; HORNIK, K. **tseries: Time Series Analysis and Computational Finance**. [S.l.], 2017. R package version 0.10-42. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=tseries>>.
- VASCONCELLOS, M.; ALVES, D. coordenadores. **Manual de Econometria: nível intermediário**, 2000.
- WICKHAM, H. **ggplot2: elegant graphics for data analysis**. Springer New York, 2009. ISBN 978-0-387-98140-6. Disponível em: <<http://had.co.nz/ggplot2/book>>.
- YAHOO Finanças. 2017. <<https://br.financas.yahoo.com/>>. Acessado em 28/04/2017.
- ZEILEIS, A.; GROTHENDIECK, G. zoo: S3 infrastructure for regular and irregular time series. **Journal of Statistical Software**, v. 14, n. 6, p. 1–27, 2005. Disponível em: <<http://www.jstatsoft.org/v14/i06/>>.